

416
Astr. P.
415
07

410
Astr. P.

Lee

40

415 03

Bayerische Staatsbibliothek



<36645292590015

DIE ENTWICKELUNG
DER
DOPPELSTERN-SYSTEME.

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR
ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE
VON DER
PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT
DER
KÖNIGLICHEN FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
GENEHMIGT
UND
NEBST DEN BEIGEFÜGTEN THESEN ÖFFENTLICH ZU VERTEIDIGEN
AM 10. DEZEMBER 1892
VON
THOMAS JEFFERSON JACKSON SEE
AUS COLUMBIA, MISSOURI.

OPPONENTEN:
KARL NECKER, CAND. MATH. ET ASTRON.
DR. KURT LAVES, ASTRONOM IN BERLIN.
DR. VICTOR WELLMANN, ASTRONOM DER KGL. STERNWARTE ZU BERLIN.

BERLIN.
A. W. SCHADE'S BUCHDRUCKEREI (L. SCHADE).
STALLSCHREIBERSTRASSE 45-46.

SEINEN
HOCHVEREHRTEN LEHRERN

DEN HERREN

PROFESSOREN FOERSTER UND TIETJEN

IN DANKBARKEIT GEWIDMET.

DIE ENTWICKELUNG
DER
DOPPELSTERN-SYSTEME.

»L'un des phénomènes les plus remarquables du système du monde est celui de tous les mouvements de rotation et de révolution des planètes et des satellites dans le sens de la rotation du soleil et à peu près dans le plan de son équateur. Un phénomène aussi remarquable n'est point l'effet du hasard; il indique une cause générale qui a déterminé tous ces mouvements. * * *

Un autre phénomène également remarquable du système solaire est le peu d'excentricité des orbes des planètes et des satellites, tandis que ceux des comètes sont très allongés * * *

Quelle est cette cause primitive? J'exposerai sur cela, dans la note qui termine cet ouvrage (Système du Monde) une hypothèse, qui me paraît résulter avec une grande vraisemblance des phénomènes précédents, mais que je présente avec la défiance que doit inspirer tout ce qui n'est point un résultat de l'observation ou de calcul«.

Laplace.

EINLEITUNG.

In den »Philosophical Transactions« und »Proceedings of the Royal Society of London« von 1878 bis 1882 hat Prof. G. H. Darwin die Resultate seiner höchst interessanten Untersuchungen über den säculären Einfluss der körperlichen Gezeitenreibung auf die Geschichte der Erde und des Mondes niedergelegt und die so entwickelten Principien auf andere Teile des Planetensystems ausgedehnt. Diese Forschungen werfen ein ganz neues Licht auf die Entstehung des Mondes und liefern bemerkenswerte Beiträge zur Entwicklungsgeschichte des Erde-Mond-Systems unter der Wirkung der Gezeitenreibung. Es wird auch gezeigt, dass in den anderen Satelliten-Systemen und im Planetensystem im Ganzen genommen der Einfluss der Gezeitenreibung von weit geringerer Bedeutung ist als in dem Falle der Erde und des Mondes, hauptsächlich wegen der verhältnismässig kleinen Massen der begleitenden Körper. Die von Prof. Darwin entwickelten Principien sind offenbar von grosser Bedeutung, sind aber bisher nur auf das Sonnensystem angewandt worden, in welchem die Verhältnisse, hauptsächlich wegen der relativ geringen Massen der Planeten und Satelliten, sehr ungünstig sind.

In den Doppelsternsystemen ist jedoch die Massenverteilung eine ganz andere, da hier die Körper oft nahezu gleich und immer relativ comparabel oder von derselben Ordnung sind; folglich muss die Wirkung der Gezeitenreibung in der Entwicklungsgeschichte der Doppelsterne eine wichtigere Rolle spielen. Deshalb wird in der vorliegenden Arbeit beabsichtigt, die Entstehung und Entwicklung dieser Sternsysteme zu untersuchen und besonders die Wirkung der Gezeitenreibung zu betrachten.

Ich begann diese Untersuchung aus eigenem Antrieb vor ungefähr vier Jahren, bevor ich Prof. Darwin's Originalarbeit gelesen hatte. Nachdem ich eine Tabelle von Sternbahnen zusammengestellt hatte, ergab sich die merkwürdige Thatsache, dass die Excentricitäten im Allgemeinen sehr gross waren. Der auffällige Gegensatz zu der wohlbekannten Kreisform der Planetenbahnen führte mich bald zu der Vermutung, dass irgend eine physikalische Ursache in den Sternsystemen mächtig gewirkt habe, welche in den Planetenbahnen kaum einen Eindruck hinterlassen hatte; und es kam mir der Gedanke, dass die Ursache, welche die Doppelsternbahnen in die Länge gezogen hat, die säculäre Gezeitenreibung sei. Noch bevor ich davon

Kenntnis bekam, dass Prof. Darwin die säculären Excentricitätsschwankungen untersucht hatte, plante ich einen elementaren Nachweis dafür, dass, wenn die Umdrehungszeit kleiner ist als die Umlaufszeit, so dass die Gezeiten sich verzögern (weniger als 90°), die Excentricität gewöhnlich zunehmen wird. Spätere Untersuchungen auf Grund von Methoden, analog den Darwin'schen, haben mir diesen Schluss bestätigt und mich zu einer neuen Entwicklungstheorie der Doppelsterne aus Doppelnebeln geführt. In einer ausführlicheren Arbeit (*»Evolution of the Stellar Systems«*), die ich bald zu veröffentlichen gedenke, wird bewiesen, dass die Sternbahnen ursprünglich nahezu kreisrund waren, und dass die Gezeitenreibung im Verlaufe unermesslicher Zeiträume sie ausgedehnt und stark excentrisch gemacht hat. In der vorliegenden Arbeit wird unser Augenmerk ausschliesslich auf die Hauptresultate der erwähnten Arbeit gerichtet sein und auf die allgemeine Tragweite der Untersuchung in Bezug auf die Theorien der Kosmogenie.

Wir werden zuerst nach strengen dynamischen Principien die Wirkung der Gezeitenreibung untersuchen in einem System von zwei gleichen, flüssigen Sphäroiden von geringer Viscosität*, mit gleichschneller und gleichgerichteter Umdrehung um Axen, die auf der Bahnebene nahezu senkrecht stehen. Sodann soll zur Illustration der so entwickelten Theorie eine Tabelle der besten, bis jetzt erreichbaren Sternbahnen gegeben werden, und eine Erörterung einiger Gleichgewichtsfiguren von rotierenden Flüssigkeitsmassen, deren volle Bedeutung, wie es scheint, bis jetzt noch nicht bemerkt worden ist. Wir werden also Gelegenheit haben, die auf Grund von mathematischen Untersuchungen gefundenen Gleichgewichtsfiguren mit Doppelnebeln zu vergleichen, die im Weltenraum beobachtet worden sind; und aus der so begründeten neuen Entwicklungstheorie der Gestirne wird sich ergeben, dass unser so merkwürdiges Planetensystem nicht typisch ist für die Vorgänge am Himmel, wie sie in den Doppelsternen und Doppelnebeln vertreten sind, die als die normale Form angesehen werden können.

Der Einfachheit wegen werden wir die flüssigen Sphäroide als Helios und Sol bezeichnen, und jedes wird als im Wesentlichen der Sonne gleich angenommen. In Uebereinstimmung mit mechanischen, in der Natur geltenden Principien sei vorausgesetzt, dass die Umdrehung der beiden Sphäroide in derselben Richtung vor sich gehe, wie die Umlaufsbewegung. Ferner werden wir bei der graphischen Darstellung der Geschichte des Systems der Einfachheit wegen annehmen, dass Helios und Sol identische Sphäroide sind und gleiche Anfangsgeschwindigkeit der Umdrehungen besitzen, so dass unter dem Einfluss der Gezeitenreibung beide Umdrehungen identischen Veränderungen unterliegen. Man hat Ursache zu glauben, wie wir noch später sehen werden, dass diese Vereinfachungen keine erhebliche Fehlerquelle sind für die Anwendung der Resultate der graphischen Darstellung auf die im Raum existierenden Systeme.

* Wir bezeichnen mit »Viscosität« die physikalische Eigenschaft der »Zähflüssigkeit«.

CAPITEL I.

STRENGE DYNAMISCHE UNTERSUCHUNG DER SÄCULÄREN WIRKUNGEN DER REIBUNG DER GEZEITEN AUF DAS SYSTEM VON HELIOS UND SOL.

§ 1. *Ableitung der Fundamentalgleichungen.*

Angewendete Zeichen:

Ω die Umlaufwinkelgeschwindigkeit von Sol, die Bahn sei kreisförmig.

y die Umdrehungswinkelgeschwindigkeit von Helios.

z die Umdrehungswinkelgeschwindigkeit von Sol.

I Trägheitsmoment von Helios in Bezug auf seine Rotationsaxe.

I' Trägheitsmoment von Sol in Bezug auf seine Rotationsaxe.

H die resultierende Bewegungsgrösse des ganzen Systems.

$\frac{E}{2}$ die gesamte Energie des Systems, sowohl kinetische als potentielle.

μ die Anziehung zwischen Masseneinheiten in der Einheitsentfernung.

Angenommen, Sol, ein Stern von der Masse M' , bewege sich in kreisförmiger Bahn mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um Helios, einen Stern von der Masse M .

Angenommen ferner, Helios und Sol rotieren in demselben Sinne mit den Winkelgeschwindigkeiten y und z um Axen, die auf der Bahnebene senkrecht stehen. Es sei vorausgesetzt, dass die Gestalten der Sterne und die Verteilung ihrer inneren Dichtigkeiten derart sind, dass kein Kräftepaar durch die gegenseitige Schwerewirkung an irgend einer, zu den Rotationsaxen senkrechten Axe eintritt. Schliesslich nehmen wir an, die Sphäroide Helios und Sol bestehen aus einer unvollkommen elastischen oder zähen Flüssigkeit. Dann wird die Anziehung eines jeden der beiden Sterne in den Teilchen des anderen entsprechende Bewegung hervorrufen, und da diese Bewegung der Reibung unterworfen ist, so werden sich körperliche Gezeiten von reibungsartigem Charakter in dem System entwickeln. Nun wird bei dieser inneren körperlichen Reibung der Gezeiten Bewegungsenergie in Wärme umgesetzt, und die Wärme wird von den Sternkörpern in den umgebenden Raum ausgestrahlt. Helios und Sol erleiden deshalb durch Strahlung einen Verlust an Energie als Resultat der Reibung der Gezeiten. Demnach muss die Configuration des Systems sich in der Weise ändern, dass eine Verminderung der Gesamtenergie eintritt.

Man wird bemerken, dass wir dem System anfänglich einen Zustand von Wärmegleichgewicht in Bezug auf den äusseren umgebenden Raum beigelegt haben. Dies ist jedoch nicht der Fall bei den existierenden Sternsystemen, welche thatsächlich durch Licht- und Wärmestrahlung fortwährend Energie verlieren. Nichtsdestoweniger leuchtet es ein, dass die Instabilität des Wärmegleichgewichtes zunehmen würde durch Einführung von Reibungszeiten in ein Sternsystem, und deshalb können wir bei unserer Untersuchung die ursprüngliche Instabilität des Wärmegleichgewichtes ausser Acht lassen und nur die Zunahme derselben betrachten, die von den Reibungszeiten herrührt. Nach diesem Princip kann man die Sternsysteme in der Natur ebenso streng untersuchen, wie ein ideales System im Wärmegleichgewicht bezüglich des umgebenden Raumes.

Nach Prof. G. H. Darwin's Vorgang wählen wir nun ein specielles System von Einheiten* der Masse, der Länge und Zeit, so dass die späteren analytischen Resultate sich auf die einfachste Form reduciren. Die Einheit der Masse sei $\frac{M M'}{M + M'}$. Die Längeneinheit Γ sei eine solche Strecke, dass das Trägheitsmoment von Helios in Bezug auf seine Rotationsaxe gleich sein soll dem Trägheitsmoment von Helios und Sol als materielle Punkte behandelt, in Bezug auf ihr gemeinsames Trägheitscentrum, wenn ihre Entfernung von einander Γ beträgt. Unter diesen Verhältnissen ist:

$$M \left\{ \frac{M' \Gamma}{M + M'} \right\}^2 + M' \left\{ \frac{M \Gamma}{M + M'} \right\}^2 = I, \text{ folglich } \Gamma = \left\{ \frac{I(M + M')}{M M'} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Die Zeiteinheit Θ sei diejenige Zeit, in welcher Sol bei seiner Bewegung um Helios $57^{\circ},3$ zurücklegt, wenn der Radiusvector des Sol gleich Γ ist. In diesem Fall ist $\frac{1}{\Theta}$ die Umlaufwinkelgeschwindigkeit von Sol. Aus der Verallgemeinerung des dritten Kepler'schen Gesetzes (bei kreisförmiger Bahn) haben wir

$$\Theta^{-2} \Gamma^3 = \mu (M + M').$$

Wenn wir in dieser Gleichung den oben reducierten Wert für Γ einsetzen, finden wir durch Reduction:

$$\Theta = \left\{ \frac{I^3 (M + M')}{\mu^2 (M M')^3} \right\}^{\frac{1}{4}}.$$

Dieses System von Einheiten ist hergeleitet worden aus der Betrachtung, dass jede der drei folgenden Functionen gleich 1 sein soll: $\mu^{\frac{1}{2}} M M' (M + M')^{-\frac{1}{2}}$, $\mu M M'$, I .

Nehmen wir jetzt an, die beiden Sterne werden in Kreisbahnen um ihr gemeinsames Trägheitscentrum in Bewegung gesetzt mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω , wobei die Entfernung der Trägheitscentra ϱ ist; dann ist offenbar die Umlaufbewegungsgrösse

* »The Determination of the secular Effects of Tidal Friction by a Graphical Method«. Proc. Roy. Soc. 1879, No. 197, p. 169. Die vorliegende Untersuchung basiert zum grossen Teil auf der Prof. Darwin's.

$$M \left(\frac{M' \varrho}{M+M'} \right)^2 \Omega + M' \left(\frac{M \varrho}{M+M'} \right)^2 \Omega = \left(\frac{MM'}{M+M'} \right) \varrho^2 \Omega.$$

Nach dem obigen Gesetz bei einer kreisförmigen Bahn ist:

$$\Omega^2 \varrho^3 = \mu (M+M'), \text{ also } \Omega \varrho^2 = \mu^{\frac{1}{2}} (M+M')^{\frac{1}{2}} \varrho^{\frac{1}{2}}.$$

Die Bewegungsgrösse des Umlaufs reduciert sich, wenn man für $\Omega \varrho^2$ seinen Wert einsetzt, auf die Formel $\mu^{\frac{1}{2}} MM' (M+M')^{-\frac{1}{2}} \varrho^{\frac{1}{2}}$, welche bei speciellen Einheiten gleich $\varrho^{\frac{1}{2}}$ ist.

Die Bewegungsgrösse von Helios' Axendrehung ist Iy ; und die von Sol in gleicher Weise Iz . Nun setzt sich die Bewegungsgrösse des ganzen Systems zusammen aus den Bewegungsgrössen der Axendrehung und der Umlaufsbewegung der Körper, welche das System bilden, und ist eine constante Grösse, die wir mit H bezeichnet haben. Deshalb ist

$$H = Iy + Iz + \mu^{\frac{1}{2}} MM' (M+M')^{-\frac{1}{2}} \varrho^{\frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die kinetische Energie der Umlaufsbewegung ist

$$\frac{1}{2} M \left(\frac{M' \varrho}{M+M'} \right)^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} M' \left(\frac{M \varrho}{M+M'} \right)^2 \Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{MM'}{M+M'} \varrho^2 \Omega^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{MM'}{\varrho}.$$

Die kinetische Energie von Helios' Axendrehung ist $\frac{1}{2} Iy^2$, und diejenige von Sol's Axendrehung ist $\frac{1}{2} Iz^2$. Die potentielle Energie des Systems von Helios und Sol ist einfach $-\mu \frac{MM'}{\varrho}$. Durch Addition dieser drei Energieen erhalten wir die Gesamtenergie des Systems, eine Grösse, die sich unter der Wirkung der Gezeitenreibung vermindern muss.

$$\frac{E}{2} = \frac{1}{2} Iy^2 + \frac{1}{2} Iz^2 - \frac{\mu}{2} \frac{MM'}{\varrho},$$

oder

$$E = Iy^2 + Iz^2 - \frac{\mu MM'}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

In dem System von speciellen Einheiten ist I und $\mu MM'$ jedes gleich 1, und deshalb, wenn wir $\frac{I'}{I} = k$ setzen, kann die Gleichung geschrieben werden:

$$E = y^2 + kz^2 - \frac{1}{\varrho}.$$

Es sei $x = \Omega^{-\frac{1}{2}}$, dann ist, da $\Omega^{-\frac{1}{2}} = \varrho^{\frac{1}{2}}$, $x = \varrho^{\frac{1}{2}}$. Man bemerke, dass x die Umlaufsbewegungsgrösse darstellt und auch die Quadratwurzel der mittleren Entfernung zwischen den Mittelpunkten von Helios und Sol. (1) ist die Gleichung der Erhaltung der Bewegungsgrösse, und (2) ist die Gleichung der Energie. Wenn wir annehmen,

dass die Sterne um ihr gemeinschaftliches Trägheitscentrum kreisen und sich so um ihre eigne Axe drehen, dass sie einander immer dieselbe Fläche zukehren, d. h. $\Omega = y = z$, dann wird das System sich in einer gewissen Starrheit befinden, da keine relative Bewegung seiner Teile stattfindet. Und da $\Omega^{-\frac{1}{3}} = x$, so ist es klar, dass $x = y^{-\frac{1}{3}} = z^{-\frac{1}{3}}$, oder $x^3 y = 1$, $x^3 z = 1$, welches die Gleichung der Starrheit ist. Die drei Fundamentalgleichungen, die man durch Reduction erhält, sind also die folgenden:

$$H = y + kz + x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$E = y^2 + kz^2 - \frac{1}{x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$x^3 y = 1, \quad x^3 z = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

§ 2. Die Fundamentalgleichungen graphisch erläutert.

Es wird jetzt vorteilhaft sein, diese Gleichungen nach den Ordinaten eines Systems von drei rechtwinkligen Axen darzustellen. Die graphisch darzustellenden Gleichungen sind die folgenden:

$$\text{Bewegungsebene} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad H = y + kz + x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\text{Fläche der Energie} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad E = y^2 + kz^2 - \frac{1}{x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\text{Curve der Starrheit} \quad . \quad . \quad x^3 y = 1, \quad x^3 z = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Da H constant ist, repräsentiert die Gleichung (3) offenbar eine Ebene, von Prof. Darwin Bewegungsebene genannt, in der jeder Punkt einer Configuration des Systems entspricht. Ein solcher Punkt, wenn er die Configuration repräsentiert, heisst der Leitpunkt des Systems; wenn die Configuration sich ändert, gleitet der Leitpunkt auf der Bewegungsebene entlang. Gleichung (5) stellt die Starrheitscurve dar, welche offenbar in Hinsicht auf die Axen y und z symmetrisch ist. Dieselbe ist deshalb eine Linie mit einer einfachen Krümmung und liegt in einer Ebene, welche man die Starrheitsebene nennen kann; sie geht durch die Axe x und bildet mit den Axen y und z einen Winkel von 45° . Die Starrheitscurve schneidet die Bewegungsebene (wenn überhaupt) in zwei Punkten, welche Configurationen des Systems entsprechen, wo die Körper sich bewegen, als wären sie in starrer Verbindung mit einander. Es wird sofort einleuchten, dass der Punkt, welcher dem kleineren Werte von x entspricht, eine Configuration von maximaler Energie des Systems repräsentiert, der andere Punkt eine Configuration von minimaler Energie. Aus den Gleichungen (3) und (5) haben wir

$$x^4 - Hx^3 + 1 + k = 0.$$

Die reellen Wurzeln (wenn vorhanden) dieser biquadratischen Gleichung sind die Abscissen der Maximum- und Minimumpunkte. Da überdies das y und z aller

Punkte auf der Starrheitscurve, und folglich auch dieser zwei Punkte gleich sind, genügt die Gleichung (3) vollkommen, diese Coordinaten zu bestimmen, wenn die reellen Wurzeln bekannt sind.

Es bleibt noch die Gleichung (4) zu betrachten. Die Energiefläche für ein constantes E könnte leicht gezeichnet werden, es würde aber von geringem Interesse sein, da die Reihe von Ereignissen, die wir zu skizzieren uns bemühen, erfordert, dass E sich verkleinere, da das System Helios-Sol nicht conservativ ist, und die Energie eines nicht conservativen Systems abnehmen muss. Die Gleichung (4) muss deshalb umgewandelt werden, und das Resultat wird für das Auge höchst befriedigend sein, wenn die Umwandlung so ausgeführt wird, dass die Aenderung von E und x graphisch durch eine ebene Curve dargestellt wird. Wenn in Gleichung (3) $k = 1$, wozu erforderlich ist, dass die Trägheitsmomente der zwei Sterne gleich seien, und wenn ausserdem die beiden Sterne, einmal in Bewegung gesetzt, auch ganz gleiche Umdrehungsgeschwindigkeiten besitzen, also $y = z$ (nach Voraussetzung haben die zwei Massen durchaus dieselbe Structur bezüglich der Verteilung der Dichtigkeit, und beide erleiden demnach gleichzeitig dieselben Veränderungen), können wir diese Umwandlung sogleich ausführen. Nach Voraussetzung ist $y = z$, folglich reducirt sich $H = y + kz + x$, die Gleichung der Bewegungsebene, zu der einer Linie, die in Hinsicht auf die Axen y und z symmetrisch ist und durch die Axe x geht. Die Ebene, welche diese Linie enthält, ist bereits die Starrheitsebene genannt worden. Nennt man die Ordinate (senkrecht auf der Axe x) in dieser Starrheitsebene η , so haben wir für die Beziehung zu y und z die Gleichung $\eta^2 = y^2 + z^2$; und da $y = z$ für die Starrheitsebene, $\eta = y\sqrt{2} = z\sqrt{2}$; und setzt man in Gleichung (3) y für z , so hat man $H = \eta\sqrt{2} + x$; folglich

$$\eta = \frac{H - x}{\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ebenso wird (4)

$$E = 2y^2 - \frac{1}{x^2} = \eta^2 - \frac{1}{x^2},$$

und wenn man für η den eben gefundenen Wert einsetzt, erhält die Gleichung (4) folgende Form:

$$E = \frac{(H-x)^2}{2} - \frac{1}{x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

welche graphisch dargestellt werden kann als eine ebene Curve, deren Abscisse x und deren Ordinate E ist. Und da sich dies so verhält, kann man die Punkte des Maximums und Minimums (wenn vorhanden) auf dieser Curve finden unter der gewöhnlichen Bedingung $\frac{dE}{dx} = 0$. Folglich ergeben in der entstehenden biquadratischen Gleichung $x^4 - Hx^3 + 2 = 0$, die zwei reellen Wurzeln (wenn möglich) die Werte von x , wobei der kleinere dem Maximum von Energie und der grössere

Wir schreiten nun dazu, eine Figur zu entwerfen, um die verschiedenen mechanischen Wechselwirkungen darzustellen, welche unter den angenommenen Verhältnissen im System stattfinden. Die darzustellenden Gleichungen sind:

$$\text{Isogyrisme} \quad . \quad . \quad \eta = \frac{H-x}{\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\text{Energie} \quad . \quad . \quad . \quad E = \frac{(H-x)^2}{2} - \frac{1}{x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\text{Starrheit} \quad . \quad . \quad x^3 \eta = \sqrt{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die anfängliche Bewegungsgrösse kann willkürlich gewählt werden, und wir legen H deshalb den Zahlenwert 4 bei. Das giebt für die Energiecurve ein Maximum und ein Minimum, und macht zwei von den Wurzeln des biquadratischen Ausdruckes reell. Gleichung (6) stellt eine gerade Linie dar, und es leuchtet ein, dass jeder Punkt auf dieser Linie eine Configuration des Systems darstellt. Jeder Punkt auf der Energiecurve wird auch eine Configuration darstellen, und für jeden Punkt auf der Isogyrisme giebt es folglich einen entsprechenden Punkt auf der Energiecurve, welcher dieselbe Abscisse hat. Der Punkt auf der Isogyrisme ist der Leitpunkt des Systems genannt worden, und derjenige auf der Energiecurve heisse der Richtpunkt, da er, wie sich bald ergeben wird, durch seine Bewegung die Richtung anzeigt, in welcher sich der Leitpunkt bewegt, wenn die Configuration sich ändert. Nehmen wir nun an, der Richtpunkt nehme irgend eine gegebene Stelle ein auf der Energiecurve und bewege sich fort. Offenbar wird sich dann der Leitpunkt auf der Isogyrisme mitbewegen, da die beiden Punkte immer dieselbe Abscisse haben. Der Punkt auf der Energiecurve kann also betrachtet werden als derjenige, welcher den auf der Isogyrisme liegenden richtet. Nach dem, was über den nicht conservativen Charakter des Helios-Sol-Systems gesagt worden ist, leuchtet es ein, dass die Energie abnehmen muss. Obgleich also die Punkte ursprünglich gleich eingestellt sind, wird man leicht einsehen, dass der Punkt auf der Energiecurve immer schräg abwärts gleiten muss, wobei er den Punkt auf der Isogyrisme mit sich zieht. In der Figur **B** sehen wir Neigungen an der Energiecurve, von denen zwei zum Stern Helios (welcher im Ursprungspunkt steht) hinabziehen, während die beiden anderen Neigungen zum Minimum hinunterführen. Es giebt also vier Arten, auf welche das System abnehmen kann, je nach den Anfangsbedingungen. Und diese vier Arten von Abnahme des Systems sollen jetzt in allen wesentlichen Einzelheiten betrachtet werden. Zur Bequemlichkeit ist die Figur mit Buchstaben versehen, und die Benennung ist wesentlich dieselbe, welche Prof. Darwin in seiner Erläuterung der Geschichte des Erde-Mond-Systems benutzt hat*.

Die allgemeine Natur der Energiecurve ist aus der Figur leicht ersichtlich. Wenn x sehr klein ist, lautet die Gleichung (7) annähernd: $E = -\frac{1}{x^2}$; folglich sehen

* Proc. Roy. Soc. No. 197, 1879, p. 172.

wir, dass die Curve beim Hinabsteigen unter den Ursprungspunkt asymptotisch zu den Ordinaten auf beiden Seiten wird.

(a) Derjenige Abschnitt der Isogyrisme, in welchem sowohl x als η positiv sind, umfasst den Teil der Figur, welcher zwischen den **C** und **D** entsprechenden Abscissen liegt, und ist der wichtigste Abschnitt in Bezug auf die Anwendung der Resultate auf die wirklich im Raum existierenden Sternsysteme. Die Zeit der Umdrehung ist grösser als die Umlaufszeit des Sol für die Teile **AC** und **BD** der Isogyrisme.

(i) Für dieses merkwürdige Verhältnis giebt es ein Beispiel im System des Planeten Mars, wo Phobos seinen Umlauf in kürzerer Zeit beendet als der Planet seine Axendrehung. Und es ist sehr leicht möglich, dass manche von den unsichtbaren Doppelsternen (wie β Persei, α Virginis, β Aurigae, ζ Ursae Majoris, etc.), die erst kürzlich durch den Spectralapparat aufgefunden wurden, sich in einem ähnlichen Zustand von dynamischer Instabilität befinden. Ist das der Fall, dann sollte wohl die Gezeitenwirkung im Laufe einiger Jahrhunderte die Umlaufsperiode merklich verkürzen oder sonst ändern. Das Studium von Systemen des Algol-Typus ist deshalb von grossem Interesse für die Wissenschaft.

In dem Falle, wo die Isogyrisme die Starrheitscurve nicht berührt, umfassen die Teile **AC** und **BD** die ganze Linie **CD**, da in diesem Falle **AB** verschwindet, und die Energiecurve kein Minimum hat. Sowohl in **AC** als in **BD**, welches auch ihre Ausdehnung sei, nähert sich der Stern Sol dem Helios — und wenn die Entfernung klein ist, fallen die Sterne zusammen, ist sie gross, dann wird das System einen Zustand von minimaler Energie erreichen und dann mit einer langen Periode wie ein starrer Körper weiterkreisen.

(ii) Für das zwischen **A** und **B** liegende Gebiet der Isogyrisme ist die Umlaufszeit länger, als die der Axendrehung des Sterns. Dieses Verhältnis zwischen Umdrehung und Umlauf besteht vielfach im Sonnensystem bei der Bewegung der Planeten um die Sonne und bei der Bewegung der Satelliten (ausser Phobos) um die Planeten.

Das Gebiet zwischen **A** und **B** umfasst ohne Zweifel die Configurationen fast aller Sternensysteme, obgleich das nicht mit absoluter Sicherheit behauptet werden kann, da noch kein Mittel entdeckt worden ist, die Zeit der Umdrehung der Sterne zu bestimmen. Es giebt aber viele Gründe für die Ansicht, dass die Umlaufszeit im Allgemeinen viel länger ist als die Umdrehungszeit, und eine auffallende Analogie bietet sich bei der Sonne und den Planeten unseres eigenen Systems. Bei vielen der Sternsysteme sind die Umlaufzeiten sehr lang — von 10 bis 10000 Jahren — und es scheint ganz unglaublich, dass Axendrehungen im Allgemeinen so langsam sein könnten. Viele der interessanteren Doppelsterne haben Perioden, die kürzer sind als ein Jahrhundert, und noch viele mit kurzen Perioden werden ohne Zweifel gefunden werden, wenn im Laufe der Zeit verbesserte Hilfsmittel uns den Himmel besser kennen lehren werden. Jedoch, da die Sonne nur ca. 25 Tage zu einer Umdrehung braucht, kann man getrost annehmen, dass fast alle von den Doppel-

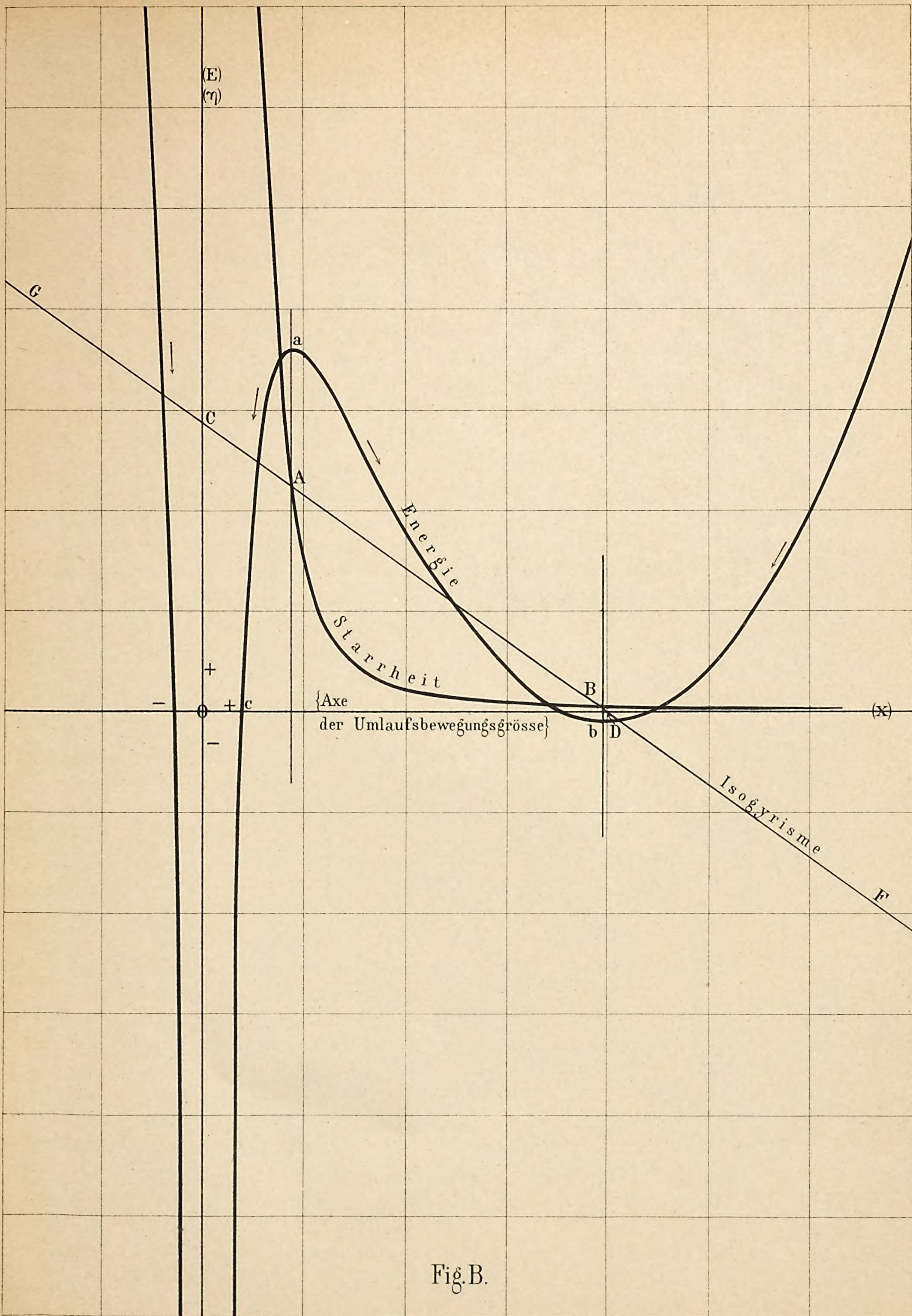


Fig.B.

sternen, ausser den kürzlich durch den Spectralapparat entdeckten, in kürzerer Zeit sich um ihre Axe drehen, als sie ihre Bahn durchlaufen. Es ist wahrscheinlich, dass es sich einst herausstellen wird, dass die zwei Klassen von Doppelsternen in einander übergehen, und es ist auch möglich, dass die Zahl spectroscopischer Doppelsterne sich erheblich vermehren wird. Aber die Thatsache wird bestehen bleiben, dass die Perioden der meisten bis jetzt entdeckten Doppelsterne lang genug sind, um anzuzeigen, dass ihre Configurationen in dem Gebiet der Isogyrisme zwischen **A** und **B** enthalten sind.

Wenn wir nun annehmen, das System Helios-Sol werde so in Bewegung gesetzt, dass der Leitpunkt bei **A** ist, so werden die Sterne sich schnell um ihr gemeinsames Trägheitscentrum bewegen, einander stets dieselben Flächen zukehrend. Wenn der Richtpunkt bei **a** ist, befindet sich das System offenbar in einem Zustand dynamischer Instabilität, denn die geringste Störung oder innere Veränderung wird bestimmen, ob der Richtpunkt die Neigung **ac** oder **ab** hinabgleiten soll, d. h. ob die Sterne zusammenfallen oder sich von einander entfernen. Wenn der Richtpunkt, bei Störung des Gleichgewichtes im System, in der Richtung **ab** hinabrückt, wird er weiterrücken, bis er das System in einen Zustand gebracht hat, der **b** entspricht. Inzwischen ist der Leitpunkt von **A** nach **B** gelangt. Das System hat dann den Zustand minimaler Energie erreicht und wird fortan ohne relative Bewegung seiner Teile und mit langer Zeitperiode weiterkreisen. Wenn aber andererseits die Aufhebung des Gleichgewichtes den Richtpunkt auf der Neigung **ac** hinabrücken lässt, werden sich die beiden Sterne einander nähern und schliesslich in Collision kommen. Folglich würde in diesem Falle das System vernichtet werden, da die beiden Sterne zu einer Masse verschmelzen würden. Wir werden späterhin den Process untersuchen, durch welchen ein einfacher Nebel sich in zwei vergleichbare Massen spaltet; wenn die Teilung kaum stattgefunden hat, befindet sich das so gebildete System in einem Zustand von dynamisch instabilem Gleichgewicht, dem Punkt **A** entsprechend. Die beiden Massen kehren einander stets dieselben Flächen zu und kreisen schnell, wie ein starrer Körper. Wenn nun die Massen entweder in ihrer Umlaufsbewegung oder bei ihrer Axendrehung auf Widerstand stossen, werden sie wieder zusammenfallen; wenn aber kein Widerstand oder keine Störung äusserer Art auftritt, werden sie weiter umlaufen, bis die Contraction der beiden Massen die Umdrehungszeit kleiner gemacht hat als die Umlaufszeit, wo die Gezeiten in den beiden Körpern sich zu verzögern und so auf das System zu wirken beginnen, dass sich die längere Axe und die Excentricität der Bahn vergrössern. Der Richtpunkt rückt dann auf der Neigung **ab** hinab, die Sterne entfernen sich von einander, und das System beginnt einen langsamen Entwicklungsprocess. Es ist zu bemerken, dass, wenn die Massen sich eben getrennt haben, die (kleine) Excentricität, welche die Bahn ursprünglich besass, zuerst abnimmt unter dem Einfluss der elliptischen Gezeiten und der Libration, worauf wir später zurückkommen werden. Aber diese Abnahme hört sofort auf, sobald die Contraction der Massen die Gezeiten verzögert, da hierdurch der Anstoss zu einer Zunahme der Excentricität gegeben ist. Es ist

deshalb wahrscheinlich, dass im Allgemeinen die Massen, einmal getrennt, nicht wieder zusammenfallen werden, sondern sich zu einem Sternsystem entwickeln werden, da der auftretende Widerstand wohl klein sein und die Contraction sicher eintreten würde.

Wenn die Massen wieder zusammenfallen, wird sich kein System entwickeln, bis eine neue Veranlassung Sol wiedererstehen lässt.

(b) Für alle Punkte der Isogyrisme von **C** durch **G** bis zur Unendlichkeit ist x negativ und η positiv, was bedeutet, dass Sol wie die Zeiger der Uhr umläuft, während Helios und Sol umgekehrt wie die Zeiger um ihre Axe sich drehen. Aber die Bewegungsgrösse von Helios' und Sol's Axendrehung zusammen ist immer grösser, als die der Umlaufsbewegung, wie aus dem Umstand hervorgeht, dass y und z zusammen sich in demselben Verhältnis ändern wie x , und dass y und z bei **C** von Anfang an einen bestimmten Wert haben, während x Null ist. Die Grössen von y und z und x sind hier numerisch ausgedrückt und ohne Rücksicht auf die Vorzeichen. Die physikalische Bedeutung ist die, dass die Bewegungsgrösse der Axendrehung der Sterne grösser ist als die der Umlaufsbewegung; dass aber, da vermöge der Gezeitenreibung die eine in die andere übergeht, beide sich in demselben Verhältnis ändern, dass nämlich, wenn die eine wächst, die andere abnimmt, und umgekehrt.

Da der zwischen **G** und **C** liegende Zweig der Energiecurve sich constant senkt, ist leicht einzusehen, dass, wie auch die Anfangsbedingungen seien, für diesen Teil der Isogyrisme die beiden Sterne sich einander nähern werden, und schliesslich zusammenfallen. Denn der Richtpunkt auf der Energiecurve muss die Neigung hinabgleiten, wobei er den Leitpunkt des Systems mitzieht, welcher an der Isogyrisme entlang gleitet; und da die Energiecurve im Gebiet zwischen **G** und **C** kein Minimum hat, wird der Richtpunkt nicht aufhören vorzurücken, bis die Körper des Systems in Collision gekommen sind.

(c) Für alle Punkte der Isogyrisme von **D** durch **F** bis zur Unendlichkeit ist x positiv und η negativ. (Das Vorzeichen von x muss immer durch das Vorzeichen von y und z bestimmt werden.) Folglich haben wir umgekehrte Zeigerbewegung bei Sol's Umlauf, aber Zeigerbewegung bei der Axendrehung von Helios und Sol. Es ist klar, dass der Wert von x immer numerisch grösser ist, als der kombinierte numerische Wert von y und z , oder, mit anderen Worten, die Bewegungsgrösse der Umlaufsbewegung ist grösser als die der Axendrehung der Sterne. Aus der Figur ersehen wir, dass der entsprechende Teil der Energiecurve sich zum Minimum hinabsenkt. Folglich, wenn das System irgendwo in dem zwischen **F** und **D** liegenden Gebiet der Isogyrisme in Bewegung gesetzt wird, wird der Richtpunkt bei seinem Hinabrücken an der Energiecurve den Leitpunkt an der Isogyrisme entlang nach **b** führen, wo die Punkte aufhören werden vorzurücken, und Helios und Sol weiterkreisen werden, als wären sie starr verbunden. Die Körper nähern sich also einander, bis das Stadium minimaler Energie erreicht ist. Es muss bemerkt werden, dass die Axendrehung der Sterne Null ist, wenn das System durch die **D**

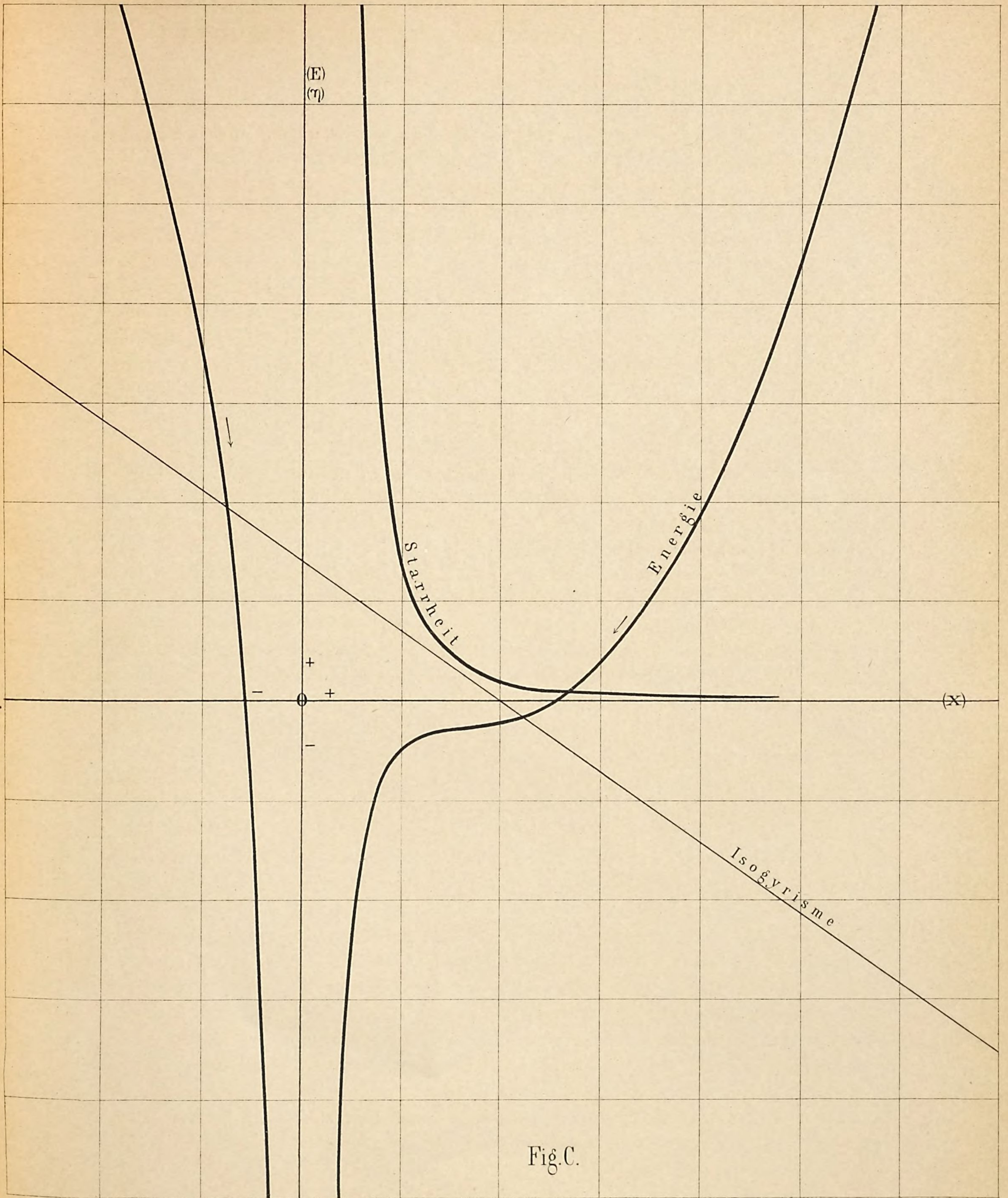


Fig.C.

entsprechende Configuration hindurchgeht, und dass von **D** bis **b** die Umdrehungen der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt werden. Die Umdrehungen werden also zuerst vernichtet und dann etwas entgegengerichtet. Wenn der starre Zustand erreicht ist, setzen die Körper ihren Umlauf fort, weit von einander entfernt und mit langen Zeitperioden.

Fasst man den Inhalt von (b) und (c) zusammen, dann ist es klar, dass, wenn die Umlaufsbewegung der Umdrehung entgegengerichtet ist, die Sterne zusammenfallen werden, wenn die Bewegungsgrösse des Umlaufs geringer wird als gleich, oder um ein gewisses kritisches Maass grösser als die Bewegungsgrösse der Sternumdrehung; aber wenn sie um ein gewisses kritisches Maass grösser ist, wird Sol sich Helios nähern, die Umdrehungen von Helios und Sol werden aufhören und sich umkehren, und schliesslich wird das System ins Gleichgewicht kommen, wenn es in einem Stadium minimaler Energie anlangt. Es wird fortan weiterkreisen wie ein starres System mit langen Zeitperioden.

Es bleibt nun übrig, noch eine weitere Zeichnung herzustellen, in welcher die Isogyrisme die Starrheitscurve nicht schneidet. In diesem Falle hat die biquadratische Gleichung $x^4 - Hx^3 + 2 = 0$ keine reellen Wurzeln, und die Energiecurve hat keine Maximum- oder Minimpunkte. Wie also das System auch in Bewegung gesetzt wird, werden die Körper zusammenfallen. Das Interesse, das sich an dieses System knüpft, ist deshalb hauptsächlich ein dynamisches, da die Systeme in der Natur unter die Bezeichnung **B** fallen dürften. Falls der biquadratische Ausdruck gleiche Wurzeln hat, wird die Isogyrisme offenbar die Starrheitscurve gerade berühren. Alle diese Verhältnisse kann man erkennen, wenn man die Isogyrisme parallel mit sich selbst verschiebt, was leicht auszuführen ist, indem man H , die Bewegungsgrösse des ganzen Systems, verändert.

In der Zeichnung **C** ist H gleich 2 angenommen.

CAPITEL II.

UEBER DIE SÄCULÄREN EXCENTRICITÄTSSCHWANKUNGEN IN FOLGE DER GEZEITENREIBUNG IN DEM SYSTEM HELIOS-SOL.

§ 1. *Erklärung der gewählten Einheiten.*

In der folgenden Untersuchung über die Geschichte der Excentricität werden wir soweit wie möglich Einheiten annehmen, welche mit den im vorigen Capitel angewandten übereinstimmen und sich an analoge Einheiten anschliessen, die von Prof. Darwin in einer verwandten Untersuchung gewählt worden sind: »On the Analytical Expressions which give the History of a fluid Planet of small Viscosity, attended by a Single Satellite«*.

Die gewählten Benennungen sind mit den sonst in der vorliegenden Arbeit gebrauchten in Uebereinstimmung gebracht worden. Die Zeichen bedeuten:

M die Masse des Helios.

M' die Masse des Sol.

I das Trägheitsmoment von Helios in Bezug auf seine Rotationsaxe.

I' das Trägheitsmoment von Sol in Bezug auf seine Rotationsaxe.

y die Drehungswinkelgeschwindigkeit von Helios.

z die Drehungswinkelgeschwindigkeit von Sol.

r der mittlere Radius von Helios.

r' der mittlere Radius von Sol.

g die mittlere reine Schwere an der Oberfläche von Helios.

g' die mittlere reine Schwere an der Oberfläche von Sol.

ϱ die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der Sphäroide.

Ω die durchschnittliche Bahnwinkelgeschwindigkeit oder mittlere Bewegung.

e die Excentricität der Bahn.

$\tau = \frac{3}{2} \frac{M'}{\varrho^3}$, M' in der astronomischen Einheit ausgedrückt.

$\tau' = \frac{3}{2} \frac{M}{\varrho^3}$, M ebenso ausgedrückt.

* Proc. Roy. Soc. 1880, No. 202.

da I nach unserer Annahme gleich 1 ist. M ist hier in der astronomischen Einheit, der vereinigten Masse der Sonne und Erde, ausgedrückt. Aber es sei bemerkt, dass, wenn wir keine Vergleiche mit dem Planetensystem anzustellen haben, wir uns auch die doppelte Masse der Sonne leicht als Einheit vorstellen können. Es ist nur nötig, dass $M + M'$ gleich 1 sei, da sonst die Gleichung (9) nicht einer Umwandlung fähig wäre. Aber wenn wir keine Vergleiche mit dem Planetensystem zu ziehen haben, ist die Einheit, welcher $M + M'$ gleich sein soll, ganz der Willkür überlassen. Deshalb setzen die Einheiten, die wir anwenden, nicht voraus, dass die Summe der Massen von Helios und Sol nicht die Masse der Sonne überschreiten darf, ausser wenn wir Vergleiche ziehen entweder mit dem Planetensystem oder mit absoluten, davon abgeleiteten Einheiten. Und da kein solcher Vergleich auf den Gleichungen, die wir eben entwickeln, basiert werden soll, dürfen wir die Resultate für anwendbar erachten auf ein Sternsystem, in welchem jeder von beiden Körpern eine gleiche Masse hat wie die Sonne. Wir werden jedoch die bereits eingeführte Nomenclatur beibehalten, und der Ausdruck astronomische Einheit soll seine gewöhnliche Bedeutung behalten. Da nun $M' = \frac{2}{5} r^2$ und $M = \frac{5}{2 r^2}$, folgt daraus, dass $MM' = 1$; und da wir $M + M'$ als 1 gewählt haben, ist der ganze Ausdruck $\frac{MM'}{M + M'} = 1$, wobei die Massen von Helios und Sol in der astronomischen Einheit ausgedrückt werden, mit den vorgeschlagenen Einheiten der Länge, Zeit und Masse.

Nach der Theorie der elliptischen Bewegung ist die Bewegungsgrösse des Umlaufs von Helios und Sol um das gemeinsame Trägheitscentrum des ganzen Systems:

$$M \left(\frac{M' \varrho}{M + M'} \right)^2 \Omega \sqrt{1 - e^2} + M' \left(\frac{M \varrho}{M + M'} \right)^2 \Omega \sqrt{1 - e^2} = \frac{MM'}{M + M'} \Omega \varrho^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (10)$$

Mit den eben eingeführten speciellen Einheiten wurde gezeigt, dass

$$\frac{MM'}{M + M'} = 1,$$

und aus (9) sehen wir, dass

$$\Omega \varrho^2 = \Omega^{-\frac{1}{3}} = \varrho^{\frac{1}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Wenn nun die Excentricität nicht sehr gross ist, kann ihr Quadrat vernachlässigt werden. Dann, wenn das System eine sehr kleine Anfangs-Excentricität besitzt, ist es klar, dass die Umlaufbewegungsgrösse (x) numerisch gleich $\Omega^{-\frac{1}{3}} = \varrho^{\frac{1}{3}}$ sein wird. Folglich ergeben (10) und (11):

$$x = \varrho^{\frac{1}{3}} = \Omega^{-\frac{1}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Bei Ausführung der später zu entwerfenden Figuren muss man sich erinnern, dass x zwar eigentlich die Bahnbewegungsgrösse, aber auch der Quadratwurzel aus der

mittleren Entfernung proportional ist. Bei der graphischen Darstellung der Geschichte der Excentricität werden wir x als die unabhängige Variable annehmen. Nun ist die Bewegungsgrösse von Helios' Axendrehung Iy , und da $I = 1$, sehen wir, dass y entweder die Bewegungsgrösse oder die Drehungswinkelgeschwindigkeit repräsentiert. Die Umdrehungsgrösse von Sol ausgedrückt durch diejenige von Helios ist kz , wo z die Drehwinkelgeschwindigkeit von Sol ist, und $k = \frac{I'}{I}$.

§ 2. *Bildung der Differentialgleichungen der säculären Veränderungen der Umlaufsbewegungsgrösse und der Excentricität.*

Angenommen, Helios und Sol seien homogene*, flüssige Sphäroide von geringer Viscosität, an Gestalt nur wenig von Kugeln verschieden und mit völlig gleicher Anfangswinkelgeschwindigkeit der Umdrehung um Axen, die nahezu senkrecht auf der Ebene der umgekehrt uhrzeigerartigen Umlaufsbewegung stehen. Die doppelte Gezeitenwirkung, die so in Folge der Axendrehung der beiden Körper entsteht, macht die graphische Untersuchung der Geschichte der Excentricität sehr schwierig. Wenn wir uns die Masse des Sol an seinem Schwerpunkt gesammelt und Helios allein auf das System wirkend denken, so ist die Wirkung in jedem gegebenen Augenblick im Wesentlichen gleich der in dem System eines rotierenden Planeten, dessen Gezeiten durch die Anziehung eines als materieller Punkt betrachteten, begleitenden Satelliten gestört worden sind. Für den letzteren einfachen Fall hat Prof. Darwin die Differentialgleichungen für die Veränderungen des Systems aufgestellt†. Und zwar sind die für die Bestimmung der säculären Geschichte der Excentricität erforderlichen Gleichungen mit unseren Benennungen die folgenden:

$$\frac{{}^h\partial x}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{\gamma} \sin 4\epsilon \left(1 - \frac{\Omega}{y}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\frac{1}{e} \frac{{}^h\partial e}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\tau^2}{\gamma} \sin 4\epsilon \frac{1}{x} \left(11 - \frac{18\Omega}{y}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

wobei die partiellen Differentiale mit dem Index h die Veränderungen in Folge der Umdrehung von Helios allein bezeichnen. Die Gleichungen (13) und (14) geben also nicht die ganze Veränderung im System, sondern nur die in Folge der Gezeitenwirkung von Helios entstehende. Sol übt jedoch ebenfalls eine Gezeiten-

* Die Resultate im Falle der Heterogenität würden gewöhnlich etwas verschieden von denen bei Homogenität ausfallen, selbst wenn die beiden ungleichartigen Sphäroide dasselbe Dichtigkeitsgesetz befolgten. Wenn aber Helios und Sol gleiche Trägheitsmomente haben und in jeder Hinsicht identisch sind, würden die Resultate unter den zwei Voraussetzungen für die Zwecke unserer Untersuchung durchaus dieselben sein.

† Proc. Roy. Soc. 1880, No. 202, p. 257.

wirkung auf das System aus, welche bestimmt werden kann unter der Annahme, dass Helios' Masse an seinem Schwerpunkt angesammelt ist, während Sol allein eine Gezeitenwirkung ausübt. Die partiellen Differentialgleichungen für die Gezeitenwirkung von Sol während desselben Zeitelementes dt sind offenbar:

$$\frac{{}^s\partial x}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\tau'^2}{\gamma'} \sin 4\epsilon' \left(1 - \frac{\Omega}{z}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\frac{1}{e} \frac{{}^s\partial e}{dt} = \frac{1}{4} \frac{\tau'^2}{\gamma'} \sin 4\epsilon' \frac{1}{x} \left(11 - \frac{18\Omega}{z}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

In Wirklichkeit rühren die Veränderungen des Systems von der gleichzeitigen Gezeitenwirkung beider Körper her; und deshalb muss eine Differentialgleichung gebildet werden, welche die Einflüsse dieser doppelten Gezeitenwirkung umfasst. Nach dem Princip, dass in dem System Helios-Sol die Anziehung eines der beiden Sphäroide unbeeinflusst bleibt von Gezeiten, die in dem anderen existieren, kann man diese doppelte Gezeitenwirkung streng untersuchen. Die Masse eines jeden der beiden Körper sei also bezüglich ihrer Wirkung auf den anderen an dem Schwerpunkt angesammelt gedacht. Deshalb wird sich die ganze Veränderung des Systems in Folge der gleichzeitigen Gezeitenwirkung von Helios und Sol während des Zeitraumes dt aus folgenden Gleichungen ergeben:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{{}^h\partial x}{dt} + \frac{{}^s\partial x}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{\gamma} \sin 4\epsilon \left(1 - \frac{\Omega}{y}\right) + \frac{1}{2} \frac{\tau'^2}{\gamma'} \sin 4\epsilon' \left(1 - \frac{\Omega}{z}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dt} = \frac{1}{e} \frac{{}^h\partial e}{dt} + \frac{1}{e} \frac{{}^s\partial e}{dt} = \frac{1}{4} \frac{\tau^2}{\gamma} \sin 4\epsilon \frac{1}{x} \left(11 - \frac{18\Omega}{y}\right) + \frac{1}{4} \frac{\tau'^2}{\gamma'} \sin 4\epsilon' \frac{1}{x} \left(11 - \frac{18\Omega}{z}\right) \quad (18)$$

Dies sind die Differentialgleichungen der Veränderungen des Systems, wenn sowohl Helios als Sol mit Axendrehung versehen sind. Wenn wir (18) durch (17) dividieren, eliminieren wir die Zeit und erhalten die Differentialgleichung der Veränderung der Excentricität in Bezug auf x als unabhängige Variable.

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dx} = \frac{1}{2x} \left\{ \frac{\tau^2}{\gamma} \sin 4\epsilon \left(11 - \frac{18\Omega}{y}\right) + \frac{\tau'^2}{\gamma'} \sin 4\epsilon' \left(11 - \frac{18\Omega}{z}\right) \right\} \cdot \quad . \quad (19)$$

Wenn wir den Verzögerungswinkel der Gezeiten in den beiden Sternen als gleich annehmen, $2\epsilon = 2\epsilon'$, reducirt sich diese Gleichung auf

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dx} = \frac{1}{2x} \left\{ \frac{\tau^2}{\gamma} \left(11 - \frac{18\Omega}{y}\right) + \frac{\tau'^2}{\gamma'} \left(11 - \frac{18\Omega}{z}\right) \right\} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Die Zeichen τ und τ' enthalten den gemeinsamen Factor $\frac{1}{\varrho^3}$, welcher weggelassen werden kann, und das Resultat werde mit τ_0 und τ'_0 bezeichnet, dann wird (20) lauten:

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dx} = \frac{1}{2x} \left\{ \frac{\tau_0^2 \left(11 - \frac{18\Omega}{y} \right) + \tau'_0{}^2 \left(11 - \frac{18\Omega}{z} \right)}{\frac{\tau_0^2}{\gamma} \left(1 - \frac{\Omega}{y} \right) + \frac{\tau'_0{}^2}{\gamma'} \left(1 - \frac{\Omega}{z} \right)} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (21)$$

Nun ist leider weder diese Gleichung noch die noch allgemeinere (19) einer allgemeinen Integration fähig. Und um aus (21) ein Integral zu erhalten, welches graphisch dargestellt werden kann, müssen wir zuerst eine erhebliche Umwandlung ausführen, und dann kann die Gleichung streng integriert werden für einen besonderen Fall, welcher anscheinend für die Sternsysteme sehr typisch ist.

§ 3. *Umwandlung der Differentialgleichung und Integration für den Fall, wo Helios und Sol identisch sind.*

Wenn Helios und Sol in jeder Hinsicht identisch sind und völlig gleiche Anfangswinkelgeschwindigkeit der Umdrehung besitzen, ist es nach dem, was in Capitel I gesagt worden ist, klar, dass y und z immer gleich sein werden. Die Voraussetzung der Identität besagt, dass $\tau'_0 = \tau_0$, $\gamma' = \gamma$. Wenn man also in Gleichung (21) y für z einsetzt, reduciert sie sich auf

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dx} = \frac{1}{2x} \left\{ \frac{\left(11 - \frac{18\Omega}{y} \right)}{\left(1 - \frac{\Omega}{y} \right)} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (22)$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt die Geschichte der Excentricität in dem typischen Fall, für welchen die Figur **B** construiert worden ist. Die Gleichung (3) der Bewegungsebene reduciert sich im vorliegenden Falle auf

$$H = 2y + x, \text{ oder } y = \frac{H - x}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (23)$$

Aus Gleichung (12) ersehen wir, dass $\Omega = x^{-3}$, und wenn man also für y und Ω ihre Werte einsetzt, lautet die Gleichung (22):

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dx} = \frac{d}{dx} \log e = \frac{1}{2x} \left\{ \frac{\frac{11(H-x)}{2} - \frac{18}{x^3}}{\frac{H-x}{2} - \frac{1}{x^3}} \right\} = \frac{1}{2x} \left\{ \frac{11x^3(H-x) - 36}{x^3(H-x) - 2} \right\} \cdot \quad (24)$$

Nun kann man diese Gleichung schreiben:

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dx} = \left\{ \frac{11x^3(H-x) - 36}{x^3(H-x) - 2} \right\} = \frac{18}{2} - \frac{25}{2} \frac{x^2(x-H)}{x^4 - Hx^3 + 2}, \quad \cdot \cdot \cdot \quad (25)$$

was durch Integration ergibt:

$$\log e = \log x^{18} - \frac{25}{2} \int \frac{x^2(x-H) dx}{x^4 - Hx^3 + 2} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (26)$$

Wenn die Integration dieser Gleichung ausgeführt ist, werden wir im Stande sein, die Geschichte der Excentricität graphisch darzustellen, wo Helios und Sol identische Sphäroide von geringer Viscosität sind, und das System im Anfang irgend eine mittlere Entfernung ϱ und irgend eine Bewegungsgrösse H hat. Um aber mit der Voraussetzung übereinzustimmen, nach welcher (12) entwickelt wurde, müssen wir annehmen, dass die Bahn nur eine kleine Anfangs-Excentricität hat.

Es bleibt nun übrig, die Integration zu vollziehen, welche in (26) bezeichnet ist. Um dies zu thun, müssen wir den Ausdruck $\frac{x^2(x-H)}{x^4 - Hx^3 + 2}$ in Teilbrüche zerpalten, die wesentlich von der Natur der Wurzeln des biquadratischen Ausdruckes $x^4 - Hx^3 + 2 = 0$ abhängen.

Prof. Darwin hat einen ähnlichen Ausdruck integriert*, in welchem die biquadratische Gleichung $x^4 - hx^3 + 1 = 0$ war. Deshalb ist es in der folgenden Erörterung der erforderlichen Integration für genügend befunden worden, eine Ausdehnung und in gewissem Grade eine Verallgemeinerung der von ihm befolgten Methode vorzunehmen.

§ 4. Auflösung der biquadratischen Gleichung nach Ferrari's Methode.

Wenn die allgemeine biquadratische Gleichung lautet

$$x^4 + p'x^3 + q'x^2 + r'x + s' = 0,$$

so haben wir als abgeleitete kubische und quadratische Gleichungen folgende†:

$$(p'm' - r')^2 = 4 \left(2m' + \frac{p'^2}{4} - q' \right) (m'^2 - s');$$

$$x^2 + \frac{p'x}{2} + m' + \frac{2a'x + b'}{2\sqrt{a'}} = 0, \quad x^2 + \frac{p'x}{2} + m' - \frac{2a'x + b'}{2\sqrt{a'}} = 0.$$

* Proc. Roy. Soc. 1880, No. 202, p. 260.

† Siehe Todhunter's »Theory of Equations« p. 117.

Aus der Gleichung $x^4 - Hx^3 + 2 = 0$ haben wir offenbar

$$8m'^3 - 16m' - 2H^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Setzen wir $\lambda = 2m'$, dann bekommen wir

$$\lambda^3 - 8\lambda - (HV\sqrt{2})^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

als die kubische Gleichung, von welcher die Auflösung des gegebenen Ausdruckes abhängt. Indem wir (28) nach Cardani's Methode der Auflösung einer kubischen Gleichung auflösen, finden wir (wenn $H = 4$):

$$m' = \frac{\lambda}{2} = \left[\left\{ \frac{H^2}{8} + \sqrt{\frac{H^4}{64} - \frac{8}{27}} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ \frac{H^2}{8} - \sqrt{\frac{H^4}{64} - \frac{8}{27}} \right\}^{\frac{1}{3}} \right] = 2; \quad \lambda = 4.$$

Die anderen allgemeinen Werte findet man leicht, wie folgt:

$$a' = \lambda + \frac{H^2}{4}; \quad b' = -\frac{\lambda H}{2}; \quad c' = \frac{\lambda^2}{4} - 2.$$

Folglich, wenn wir die biquadratische Gleichung in die zwei quadratischen Gleichungen auflösen, bekommen wir

$$x^4 - Hx^3 + 2 = \left\{ x^2 - \frac{Hx}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{2 \left(\lambda + \frac{H^2}{4} \right) x - \frac{\lambda H}{2}}{2 \left(\lambda + \frac{H^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}} \right\} \times$$

$$\left\{ x^2 - \frac{Hx}{2} + \frac{\lambda}{2} - \frac{2 \left(\lambda + \frac{H^2}{4} \right) x - \frac{\lambda H}{2}}{2 \left(\lambda + \frac{H^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}} \right\} = 0 \quad . \quad . \quad (29)$$

Den ersten quadratischen Ausdruck kann man auch schreiben:

$$\left\{ x^2 + \frac{2x \left\{ \lambda + \frac{H^2}{4} \right\} - \frac{H}{2} \left\{ \lambda + \frac{H^2}{4} \right\}^{\frac{1}{2}}}{2 \left\{ \lambda + \frac{H^2}{4} \right\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda \left\{ \lambda + \frac{H^2}{4} \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda H}{2}}{2 \left\{ \lambda + \frac{H^2}{4} \right\}^{\frac{1}{2}}} \right\} = 0;$$

und weiter reducirt

$$\left\{ x^2 + \frac{2x[4\lambda + H^2]^{\frac{1}{2}} - H}{4} + \frac{\lambda[4\lambda + H^2]^{\frac{1}{2}} - \lambda H}{2[4\lambda + H^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} = 0.$$

Nun sehen wir aus (28), dass

$$H^2 = \frac{\lambda^3 - 8\lambda}{2};$$

folglich haben wir

$$\left\{ x^2 + 2x \frac{\left\{ \left(\frac{\lambda^3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} - H \right\}}{4} + \frac{\lambda \left(\frac{\lambda^3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} - \lambda H}{2 \left(\frac{\lambda^3}{2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right\} = \left\{ x^2 + 2x \frac{\lambda^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} + \frac{\lambda^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{2}}{2\lambda^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (30)$$

Ebenso kann man leicht zeigen, dass sich der zweite quadratische Ausdruck von (29) reducirt auf:

$$\left\{ x^2 - 2x \frac{\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} + \frac{\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}}{2\lambda^{\frac{1}{2}}} \right\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Folglich lautet (29) nun:

$$\left\{ x^2 + 2x \frac{\lambda^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} + \frac{\lambda^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{2}}{2\lambda^{\frac{1}{2}}} \right\} \left\{ x^2 - 2x \frac{\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} + \frac{\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}}{2\lambda^{\frac{1}{2}}} \right\} = 0 \quad (32)$$

Die kubische Gleichung (28) kann geschrieben werden

$$(\lambda^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{2}) (\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}) = 8\lambda;$$

und diese Eigenschaft benutzend, können wir (32) so schreiben, dass alle Wurzeln des biquadratischen Ausdruckes in H und λ ausgedrückt sind:

$$x^4 - Hx^3 + 2 = \left[\left\{ x + \frac{1}{4\sqrt{2}} (\lambda^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{2}) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{4\sqrt{2}} (\lambda^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{2}) \sqrt{1 + 2H\sqrt{2}\lambda^{-\frac{3}{2}}} \right\}^2 \right] \times \\ \left[\left\{ x - \frac{1}{4\sqrt{2}} (\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{4\sqrt{2}} (\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}) \sqrt{1 - 2H\sqrt{2}\lambda^{-\frac{3}{2}}} \right\}^2 \right] = 0 \quad (33)$$

Wir werden jetzt die kubische Gleichung (28) durch eine Curve darstellen, in welcher $(H\sqrt{2})^2$ die Ordinate und λ die Abscisse ist (wobei negative Werte von $(H\sqrt{2})^2$ und λ natürlich auch zulässig sind). Die bequemste Form, die man der Gleichung geben kann, ist $(H\sqrt{2})^2 = \lambda (\lambda^2 - 8)$. Nach sorgfältiger Berechnung der Ordinaten findet man die Gestalt der Curve so, wie sie in Figur 1 dargestellt ist, welche mit Buchstaben versehen worden ist, die mit den von Prof. Darwin in einer ähnlichen Curve* gebrauchten übereinstimmen. Aus der Gleichung sowohl, als aus der Figur geht hervor, dass $OA = OA' = 2\sqrt{2}$. Die maximalen und minimalen Werte von $(H\sqrt{2})^2$ findet man nach der gewöhnlichen Bedingung

$$\frac{d[(H\sqrt{2})^2]}{d\lambda} = 0,$$

* Proc. Roy. Soc. 1880, No. 202, p. 261.

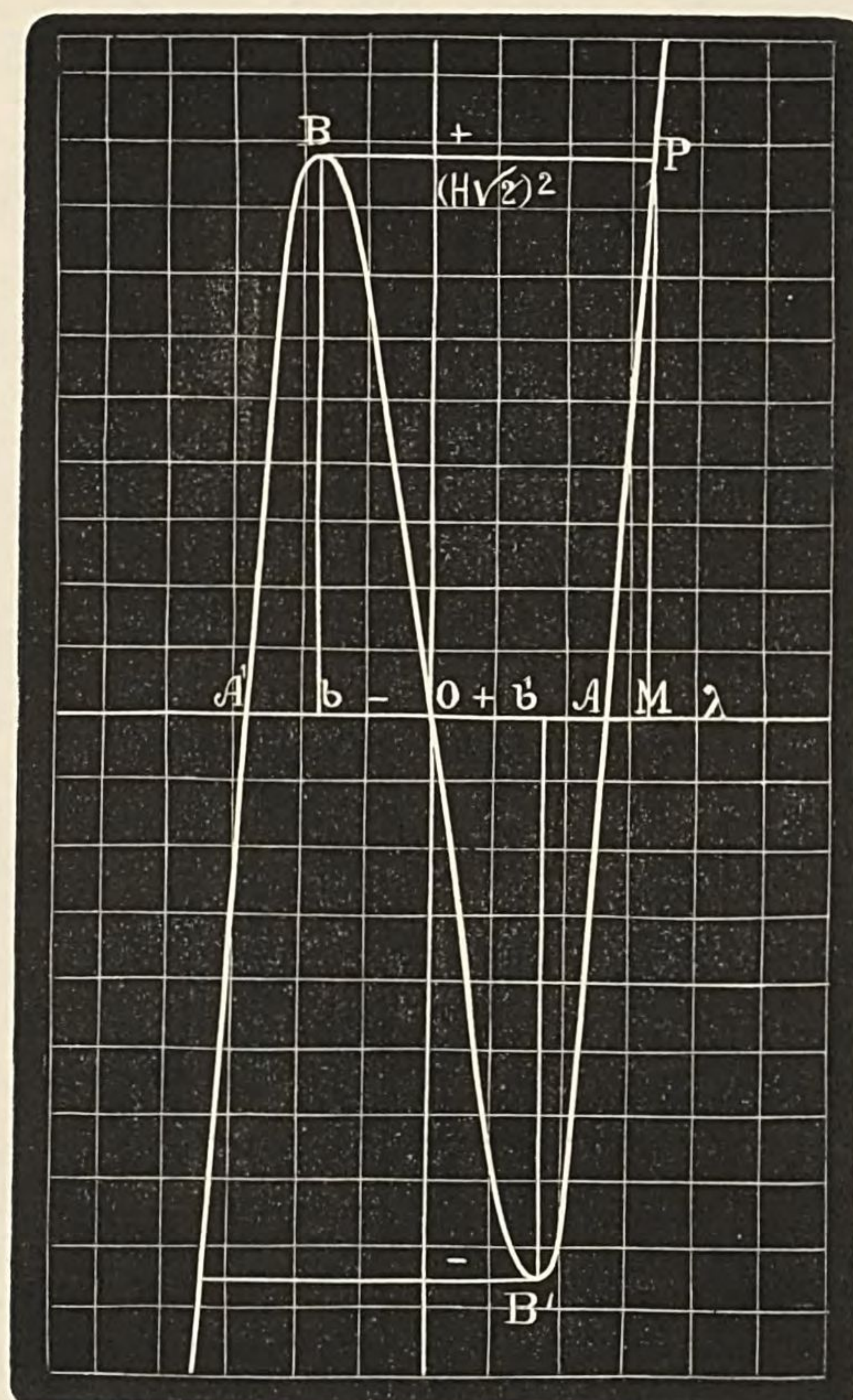
welche $3\lambda^2 = 8$ ergibt, oder

$$\lambda = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Folglich sehen wir, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{Bb} = \mathbf{B'b'} &= \left\{ \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right\}^3 - 8 \left\{ \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right\} = \pm \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right\}^3 \mp 8 \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right\} \\ &= -\frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \text{ oder } +\frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Fig. 1.



Da nun in der kubischen Gleichung $(H\sqrt{2})^2 = \lambda(\lambda^2 - 8)$, von der die Auflösung der biquadratischen abhängt, $(H\sqrt{2})^2$ notwendig positiv ist, folgt daraus, dass, wenn $H\sqrt{2}$ grösser ist als $\left(\frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$, die kubische Gleichung eine reelle Wurzel hat, die grösser ist als **OM**, und wenn $H\sqrt{2}$ kleiner ist als $\left(\frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$, sie zwei reelle negative Wurzeln hat, welche zwischen **O** und **OA'** liegen, und eine reelle positive Wurzel, die zwischen **OA** und **OM** liegt. Um **OM** zu finden, ist nur nötig, zu bemerken, dass $(H\sqrt{2})^2$ gleich $\frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ ist, und da die Wurzel der kubischen Gleichung,

die numerisch gleich $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ist, zweimal sich wiederholt (einmal minus und einmal plus), ist es klar, dass, wenn o (omicron) die dritte Wurzel oder $\mathbf{OM}$ ist, wir haben müssen:

$$\left(\lambda \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 (\lambda - o) = \lambda^3 - 8\lambda - \frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},$$

folglich

$$(2\sqrt{2})^2 \cdot o = \frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \text{ und } o \text{ oder } \mathbf{OM} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Nun ist $\mathbf{OA} = 2\sqrt{2}$, und folglich, wenn $H\sqrt{2}$ kleiner ist als $\left(\frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$, hat die kubische Gleichung eine positive Wurzel zwischen $2\sqrt{2}$ und $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, und wenn $H\sqrt{2}$ grösser ist als $\left(\frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$, hat die kubische Gleichung eine positive Wurzel zwischen $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ und der Unendlichkeit.

In dieser Arbeit wird es nur nötig sein, die positive Wurzel der kubischen Gleichung zu betrachten. Nehmen wir also an, $H\sqrt{2}$ sei grösser als $\left(\frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$, dann ist nach dem eben Bewiesenen λ offenbar grösser als $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, und folglich (wenn λ positiv) ist $3\lambda^3$ grösser als 32λ , oder $4(\lambda^3 - 8\lambda)$ grösser als λ^3 , oder $4(H\sqrt{2})^2$ grösser als λ^3 , oder $2H\sqrt{2}\lambda^{-\frac{3}{2}}$ grösser als 1.

Folglich

$$\left\{\frac{1}{4\sqrt{2}}(\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2})\sqrt{1 - 2H\sqrt{2}\lambda^{-\frac{3}{2}}}\right\}^2 = -\left\{\frac{1}{4\sqrt{2}}(\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2})\sqrt{2H\sqrt{2}\lambda^{-\frac{3}{2}} - 1}\right\}^2.$$

Also hat die biquadratische Gleichung zwei reelle Wurzeln, welche wir a und b nennen:

$$a = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2})\left[1 + \sqrt{2H\sqrt{2}\lambda^{-\frac{3}{2}} - 1}\right],$$

$$b = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2})\left[1 - \sqrt{2H\sqrt{2}\lambda^{-\frac{3}{2}} - 1}\right].$$

Es wird nun bewiesen werden, dass a grösser und b kleiner ist, als

$$\frac{3}{4} \frac{H\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4} H.$$

Nun ist $a >$ oder $< \frac{3}{4} H$, je nachdem

je nachdem $(\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}) \left[1 + \sqrt{2 H\sqrt{2} \lambda^{-\frac{3}{2}} - 1} \right] >$ oder $< 3 H\sqrt{2}$

je nachdem $\frac{(\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2})}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \sqrt{2 H\sqrt{2} - \lambda^{\frac{3}{2}}} >$ oder $< 2 H\sqrt{2} - \lambda^{\frac{3}{2}}$,

je nachdem $(\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}) >$ oder $< \lambda^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 H\sqrt{2} - \lambda^{\frac{3}{2}}}$,

je nachdem $\lambda^3 + 2 H\sqrt{2} \lambda^{\frac{3}{2}} + 2 H^2 >$ oder $< 2 H\sqrt{2} \lambda^{\frac{3}{2}} - \lambda^3$,

je nachdem $2 \lambda^3 + 2 H^2 >$ oder < 0 .

Und da die linke Seite wesentlich positiv ist, so ist a grösser als $\frac{3}{4} H$.

Wiederum ist

$$b > \text{oder} < \frac{3}{4} \frac{H\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4} H,$$

je nachdem

je nachdem $(\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}) \left[1 - \sqrt{2 H\sqrt{2} \lambda^{-\frac{3}{2}} - 1} \right] >$ oder $< 3 H$,

je nachdem $-\frac{(\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2})}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \sqrt{2 H\sqrt{2} - \lambda^{\frac{3}{2}}} >$ oder $< 2 H\sqrt{2} - \lambda^{\frac{3}{2}}$.

Da die linke Seite negativ ist und die rechte positiv, so ist die linke kleiner als die rechte, und deshalb ist b kleiner als $\frac{3}{4} H$.

Wenn also $H\sqrt{2}$ grösser ist als $\left(\frac{32 V\sqrt{2}}{3 V\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{2}}$, sind zwei von den Wurzeln des biquadratischen Ausdruckes (a und b) reell und zwei sind imaginär. In dem Fall, wo a und b reell sind, setzen wir

$$x^4 - Hx^3 + 2 = (x - a)(x - b)[(x - \alpha)^2 + \beta^2],$$

wobei

$$a - \frac{3}{4} H, \quad \frac{3}{4} H - b$$

positiv sind und α negativ.

Wir schreiten nun zu der erforderlichen Integration für diesen Fall. Es sei

$$x^4 - Hx^3 + 2 = (x - a)(x - b)[(x - \alpha)^2 + \beta^2],$$

und dann sind die Wurzeln a , b und $\alpha \pm \beta i$. a sei auch die Wurzel, welche grösser ist als $\frac{3}{4} H$, und b die, welche kleiner ist. Und man setze

$$a = a_1 + \frac{3}{4} H, \quad b = \frac{3}{4} H - b_1, \quad \alpha = \frac{3}{4} H - \alpha_1.$$

Der zu integrierende Ausdruck ist $\frac{x^2}{x^4 - Hx^3 + 2}$. Es sei

$$f(x) = (x - a) \psi(x),$$

und es sei

$$\frac{x^2}{f(x)} = \frac{A}{(x - a)} + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Dann ist

$$x^2(x - a) = A f(x) + (x - a)^2 \varphi(x); \text{ folglich } A = \frac{a^2}{f'(a)}.$$

Deshalb, wenn $f(x) = x^4 - Hx^3 + 2$,

$$A = \frac{1}{4a - 3H} = \frac{1}{4a_1}.$$

Also sind die den Wurzeln a und b entsprechenden Teilbrüche

$$\frac{1}{4a_1} \cdot \frac{1}{x - a} - \frac{1}{4b_1} \cdot \frac{1}{x - b}.$$

Wenn wir die Wurzeln $\alpha + \beta i$ und $\alpha - \beta i$ betrachten, finden wir

$$A = \frac{1}{4(\alpha \pm \beta i) - 3H}.$$

Und für $3H$ seinen Wert $(4a + 4a_1)$ einsetzend, bekommen wir als Teilbrüche für diese Wurzeln:

$$\frac{1}{4(-\alpha_1 + \beta i)[x - (\alpha + \beta i)]} \quad \text{und} \quad \frac{1}{4(-\alpha_1 - \beta i)[x - (\alpha - \beta i)]}.$$

Diese kann man schreiben:

$$\frac{1}{4(-\alpha_1 + \beta i)[(x - \alpha) - \beta i]} + \frac{1}{4(-\alpha_1 - \beta i)[(x - \alpha) + \beta i]},$$

und auf gemeinsamen Nenner gebracht wird daraus

$$\frac{(-\alpha_1 - \beta i)[(x - \alpha) + \beta i]}{4(\alpha_1^2 + \beta^2)[(x - \alpha)^2 + \beta^2]} + \frac{(-\alpha_1 + \beta i)[(x - \alpha) - \beta i]}{4(\alpha_1^2 + \beta^2)[(x - \alpha)^2 + \beta^2]}.$$

Das Resultat kann nun vereinfacht werden auf

$$\frac{-\alpha_1(x - \alpha) + \beta^2}{2(\alpha_1^2 + \beta^2)[(x - \alpha)^2 + \beta^2]} = \frac{1}{2(\alpha_1^2 + \beta^2)} \cdot \frac{-\alpha_1(x - \alpha) + \beta^2}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]}.$$

Folglich durch Addition der Teilbrüche:

$$\frac{x^2}{x^4 - Hx^3 + 2} = \frac{1}{4a_1} \cdot \frac{1}{x - a} - \frac{1}{4b_1} \cdot \frac{1}{x - b} + \frac{1}{2(\alpha_1^2 + \beta^2)} \cdot \frac{-\alpha_1(x - \alpha) + \beta^2}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]} \quad (34)$$

Und durch Integration dieses Ausdruckes erhalten wir:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^4 - Hx^3 + 2} = \frac{1}{4a_1} \log(x \infty a) - \frac{1}{4b_1} \log(x \infty b) - \frac{\alpha_1}{4(\alpha_1^2 + \beta^2)} \log[(x - \alpha)^2 + \beta^2] \\ + \frac{\beta}{2(\alpha_1^2 + \beta^2)} \arctan \frac{x - \alpha}{\beta} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Das für die Geschichte der Excentricität erforderliche Integral ist jedoch das des Ausdruckes

$$\frac{x^2(x - H)}{x^4 - Hx^3 + 2}$$

und dieses ist leicht zu finden; denn wir sehen, dass

$$x^2(x - H) = \frac{1}{4}(4x^3 - 3Hx^2) - \frac{1}{4}Hx^2 \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Und da die rechte Seite von (36) ein Viertel des Differentialies des Logarithmus von $x^4 - Hx^3 + 2$ ist, bemerken wir, dass das gewünschte Integral ist:

$$\int \frac{x^2(x - H)dx}{x^4 - Hx^3 + 2} = \frac{1}{4} \log(x^4 - Hx^3 + 2) - \frac{1}{4}H \int \frac{x^2 dx}{x^4 - Hx^3 + 2} \quad . \quad (37)$$

Gleichung (26) lautet jetzt:

$$\log e = \log x^{18} - \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{4} \log(x^4 - Hx^3 + 2) + \frac{25}{2} \cdot \frac{H}{4} \int \frac{x^2 dx}{x^4 - Hx^3 + 2} \quad (38)$$

oder ausführlich:

$$\log e = \log x^{18} - \frac{25}{8} \log(x^4 - Hx^3 + 2) + \frac{25}{4} \cdot \frac{H}{8a_1} \log(x \infty a) - \frac{25}{4} \cdot \frac{H}{8b_1} \log(x \infty b) \\ - \frac{25}{4} \cdot \frac{H\alpha_1}{8(\alpha_1^2 + \beta^2)} \log[(x - \alpha)^2 + \beta^2] + \frac{25}{4} \cdot \frac{H\beta}{4(\alpha_1^2 + \beta^2)} \arctan \frac{x - \alpha}{\beta} \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Und zu den Zahlenwerten übergehend, erhalten wir:

$$e = \frac{Bx^{18}}{[x^4 - Hx^3 + 2]^{\frac{25}{8}}} \left\{ \frac{\left((x \infty a)^{\frac{H}{8a_1}} \exp. \left[\frac{H\beta}{4(\alpha_1^2 + \beta^2)} \arctan \frac{x - \alpha}{\beta} \right] \right)^{\frac{25}{4}}}{\left((x \infty b)^{\frac{H}{8b_1}} \left[(x - \alpha)^2 + \beta^2 \right]^{\frac{H\alpha_1}{8(\alpha_1^2 + \beta^2)}} \right)} \right\} \quad (40)$$

B ist eine Constante, auszudrücken durch den Wert von x , der einem besonderen Wert von e entspricht. Diese Gleichung ist durchaus exact, und um die Geschichte der Excentricität zu erhalten, bleibt nichts übrig, als B festzustellen und die Curve zu zeichnen.

Wenn wir $H = 4$ annehmen, wie in Figur **B**, so werden wir durch Berechnung die folgenden Zahlenwerte für die in (40) angewandten Zeichen finden:

$$a = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}) \left[1 + \sqrt{2H\sqrt{2}} \lambda^{-\frac{3}{2}} - 1 \right] \dots = 3.968.$$

$$b = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}) \left[1 - \sqrt{2H\sqrt{2}} \lambda^{-\frac{3}{2}} - 1 \right] \dots = 0.860.$$

$$\alpha = -\frac{1}{4\sqrt{2}} (\lambda^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{2}) \dots = -0.414.$$

$$a_1 = a - \frac{3}{4} H \dots = 0.968.$$

$$b_1 = \frac{3}{4} H - b \dots = 2.140.$$

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{3}{4} H \dots = -3.414.$$

$$\beta = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\lambda^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{2}) \sqrt{1 + 2H\sqrt{2}} \lambda^{-\frac{3}{2}} \dots = 0.644.$$

Setzt man diese Werte in (40) ein, dann lautet die Gleichung für die Geschichte der Excentricität:

$$e = \frac{Bx^{18}}{[x - Hx^3 + 2]^{\frac{25}{8}}} \left\{ \frac{(x \infty 3.968)^{0.516} \exp. \left[0.0546 \arctan \left(\frac{x + 0.414}{0.644} \right) \right]}{(x \infty 0.860)^{0.234} [(x + 0.414)^2 + 0.414]^{-0.1414}} \right\}^{\frac{25}{4}} \quad (41)$$

Eine kleine Betrachtung wird zeigen, dass B negativ ist. Der Zahlenwert kann am besten bestimmt werden, nachdem die Ordinaten oder successiven Werte von e berechnet worden sind. Nach dem, was in der Erklärung der bei der Untersuchung der Excentricität benutzten Einheiten gesagt wurde, ist es klar, dass die Energiecurve

$$E = \frac{(H - x)^2}{2} - \frac{1}{x^2}$$

in die Figur eingeführt werden kann, um zu zeigen, wie die Veränderungen der Excentricität zu deuten sind. Es ist ebenfalls klar, dass das System niemals so abnehmen kann, dass x durch eine der reellen Wurzeln der biquadratischen Gleichung $x^4 - Hx^3 + 2 = 0$ geht; und folglich müssen wir in der obigen Gleichung anstatt $(x \infty a)$ und $(x \infty b)$ schreiben: $(x - a)$ und $(x - b)$ für das zwischen $+\infty$ und $+a$ liegende Gebiet von x ; für das zwischen $x = +a$ und $x = +b$ liegende Gebiet müssen wir $(a - x)$ und $(x - b)$ schreiben; und von $x = +b$ bis $x = -\infty$ müssen wir $(a - x)$ und $(b - x)$ einfügen. Für dieses zwischen den reellen Wurzeln der biquadratischen Gleichung liegende Gebiet von x — das am meisten interessierende Gebiet in Bezug auf die zu machenden Anwendungen auf wirkliche Sternsysteme — haben wir die Gleichung:

$$e = \frac{Bx^{18}}{[x^4 - 4x^3 + 2]^{\frac{25}{8}}} \left\{ \frac{(3.968 - x)^{0.516} \exp. \left[0.0546 \arctan \left(\frac{x + 0.414}{0.644} \right) \right]}{(x - 0.860)^{0.234} [(x + 0.414)^2 + 0.414]^{-0.1414}} \right\}^{\frac{25}{4}} \quad (42)$$

Ein Blick auf die Gleichung (18) macht es klar, dass die Excentricität eine maximale oder minimale ist, wenn $y = z = \frac{18\Omega}{11}$, und da wir nach Gleichung (3) haben: $y = z = \frac{H-x}{2}$, sehen wir, dass $\frac{H-x}{2} = \frac{18}{11x^3}$,

$$\text{oder } x^4 - Hx^3 + \frac{36}{11} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Die Wurzeln dieser biquadratischen Gleichung werden offenbar die Werte von x sein, entsprechend dem Maximum und Minimum der Excentricität. Durch Auflösung finden wir als Wurzeln:

$a = 3.937$ für das Maximum der Excentricität.

$b = 1.033$ für das Minimum der Excentricität.

§ 5. *Erörterung der Zeichnung.*

Die in Figur **E** gegebene Excentricitätscurve ist mit vieler Sorgfalt berechnet und genau in Maassstab gezeichnet worden. Die Curven der Energie, der Starrheit und die Isogyrisme sind auf den Ursprungspunkt **O'** bezogen, um die Verwirrung zu vermeiden, die entstehen würde, wenn alle auf den Ursprung **O** bezogen wären. Die Pfeile längs der Excentricitätscurve stimmen mit denen der Energiecurve überein und zeigen die Richtung an, in welcher die Veränderungen der Excentricität stattfinden. Da keine Einheit für die Excentricität eingeführt worden ist, leuchtet es ein, dass Figur **E** nur die relativen Schwankungen der Excentricität angiebt; doch sind die relativen Veränderungen zu gross und zu schnell, um uns einen Zweifel daran zu gestatten, dass der Wechsel auch absolut gross ist. Wegen dieser grossen Schwankungen musste die Curve in einem sehr verkleinerten Maassstabe gezeichnet werden. Der interessanteste Teil der Curve ist der zwischen $x = 0.860$ und $x = 3.968$, da dies wahrscheinlich das Gebiet ist, welches in der Figur den Entwicklungsgang der im Raum existierenden Sternsysteme umfasst. Dies ist das einzige Gebiet, wo die Excentricität wächst, da es der einzige Teil ist, wo die Körper sich von einander entfernen. Sonst nimmt die Excentricität ab. Die negative Excentricität hat keine physikalische Bedeutung und die Zeichnung besagt nur, dass die Excentricität abnimmt. Wenn wir annehmen, das System beginne sich zu bewegen in einer Configuration von maximaler Energie, — wie man Grund von den Sternsystemen anzunehmen hat — und wenn wir annehmen, es beschreite eine lange Entwicklungslaufbahn, welche durch die Neigung ab der Energiecurve ausgedrückt ist, leuchtet es ein, dass die Excentricität zuerst in Folge der Wirkung der Libration und der elliptischen Gezeiten abnehmen wird. Aber schliesslich, wenn 11 Umläufe dieselbe Zeit gebrauchen, wie 18 Umdrehungen, wird die Excentricität aufhören, sich zu verkleinern, da die Zunahme in Folge der Verzögerung der Ge-

zeiten grade gleich wird der Abnahme in Folge der elliptischen Gezeiten und der Libration; die Excentricität ist dann minimal. Sodann wird sie zunehmen, zuerst langsam, endlich sehr schnell, bis ein hohes Maximum erreicht ist, wo die Excentricität wieder constant wird. Die Umdrehungen sind dann beinahe vernichtet, so dass 18 Umdrehungen gleich 11 Umläufen sind, und die Einflüsse der elliptischen Gezeiten und Gezeitenlibration wieder die Wirkung der Gezeitenreibung aufheben. Nachher reduciert sich die Excentricität wieder auf Null, wenn $x = 3.968$, wo das Stadium minimaler Energie erreicht ist, und die Körper fortfahren sich in Kreisen fortzubewegen ohne relative Bewegung der Teile des Systems. In dieser Configuration von minimaler Energie ist das System im stabilen Gleichgewicht, und ohne Störung durch äussere Kräfte oder meteorischen Widerstand, oder die Wirkung eines anderen, den Weltenraum erfüllenden Mediums wird es ewig weiterkreisen.

Nun hat man Grund zu glauben, dass die Geschichte der Excentricität der Sternbahnen sich im Wesentlichen so verhält. Denn wir werden nachher zeigen, dass die Körper wahrscheinlich gebildet werden, wenn das System sich in der Configuration maximaler Energie befindet. Hernach beginnt es seinen langen Entwicklungsprocess und die Excentricität schwankt, wie es in Figur E angegeben ist.

Und wenn wir die Columne der Excentricitäten der an anderer Stelle gegebenen Tabelle der Sternbahnen betrachten, ist es kaum möglich daran zu zweifeln, dass wir die Bedeutung dieser sehr merkwürdigen Phänomene, die bisher für die Astronomen sehr verblüffend waren, richtig aufgefasst haben. Prof. Darwin bemerkt in seiner Arbeit*, die in diesem Capitel in so ausgedehntem Maasse benutzt worden ist, dass die Excentricität der Bahn eines Satelliten, wenn der Planet aus einer Flüssigkeit von geringer Viscosität besteht, während seines Entwicklungsganges sehr gross werden müsste.

Seine eigenen Worte sind:

»Das sehr schnelle Tempo der Veränderung der Excentricität im Vergleich mit dem der Schiefe würde zu der Erwartung führen, dass die Excentricität der Bahn eines Satelliten während seines Entwicklungsganges sehr gross werde, während die Schiefe nicht in erheblichem Maasse zunimmt. Aber man muss sich erinnern, dass wir hier nur einen Planeten von geringer Viscosität betrachten, und aus der oben erwähnten, nicht publicierten Arbeit wird hervorgehen, dass das Tempo der Zunahme oder Abnahme der Excentricität sehr viel weniger rasch ist (pro Einheit Zunahme von x), wenn die Viscosität nicht so gering ist, während der Modus der Zu- oder Abnahme der Obliquität (pro Einheit Zunahme von x) sich ein wenig erhöht mit der Zunahme der Viscosität. Also kann man von den beobachteten Excentricitäten der Bahnen von Satelliten und den Schiefen ihrer Planeten nicht sagen, dass sie im Betrage übereinstimmen mit der Theorie,

* Proc. Roy. Soc. 1880, No. 202, p. 272.

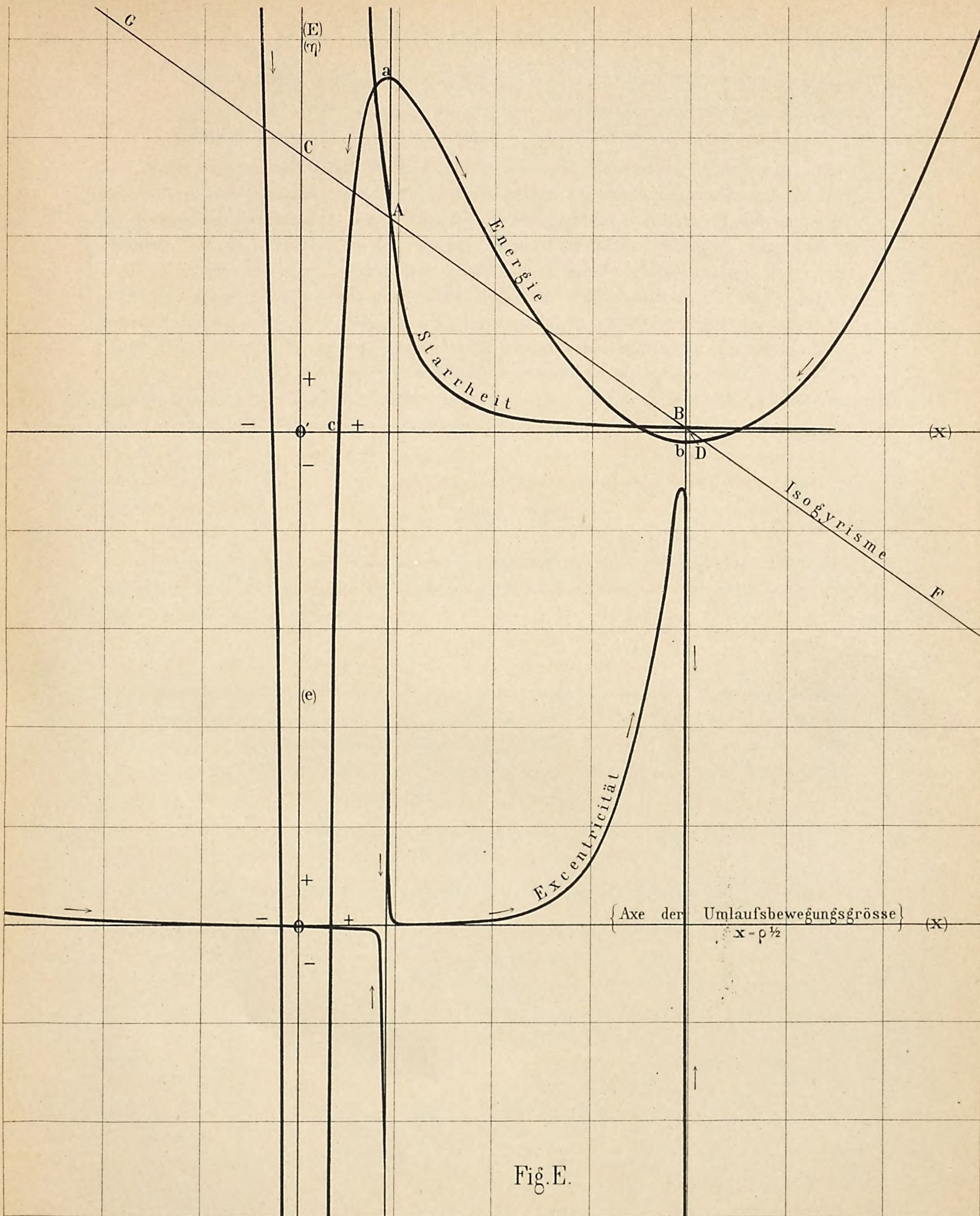


Fig. E.

dass die Planeten ursprünglich flüssig, von geringer Viscosität waren, doch glaube ich, dass sie mit der Theorie übereinstimmen, dass die Planeten flüssig oder quasi fest von grosser Viscosität waren.«

Es ist also klar, dass Prof. Darwin die volle Bedeutung seiner mathematischen Resultate erkannte; aber da die Bahnen der Satelliten nahezu kreisrund sind, fiel ihm keine Bestätigung seiner Theorie ein, folglich liess er den Gegenstand ohne weitere Untersuchung fallen. Ich möchte hier ausdrücklich bemerken, dass ich die Arbeit, welche die obige Andeutung enthält, erst im Juni 1890 gelesen habe, und dass ich damals bereits über anderthalb Jahre an dem Ursprung der Sternsysteme gearbeitet hatte, also keineswegs durch die angeführten Bemerkungen darauf hingelenkt wurde, den Ursprung der Excentricitäten der Sternbahnen zu entdecken. Eine solche Ueberzeugung so vorher berichtet zu finden ist aber interessant und kann sogar als eine Bestärkung für meine Deutung des Ursprungs der bemerkenswerten Excentricitäten der Sternbahnen angesehen werden.

§ 6. Idealer Fall.

Wir haben nun die Excentricitätsschwankungen in dem Falle zu betrachten, wo Helios und Sol identische Flüssigkeitssphäroide von geringer Viscosität sind, aber die biquadratische Gleichung

$$x^4 - Hx^3 + 2 = 0$$

keine reellen Wurzeln hat. Wir werden später sehen, dass dieser Fall hauptsächlich vom dynamischen Gesichtspunkt von Interesse ist, da er ebenso, wie der in der Zeichnung C dargestellte Fall, unter den wirklich in der Natur vorkommenden Systemen wahrscheinlich nicht eintritt. Da die biquadratische Gleichung keine reellen Wurzeln hat, kann man sie schreiben:

$$x^4 - Hx^3 + 2 = [(x - \alpha)^2 + \beta^2] [(x - \gamma)^2 + \delta^2] (44)$$

Es wird nun gezeigt werden, dass α negativ und γ grösser als $\frac{3}{4}H$ ist.

Nimmt man α an als

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}(\lambda^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{2}),$$

dann ist

$$\gamma = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}).$$

Nun ist

$$\gamma > \text{ oder } < \frac{3H\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{4}H,$$

je nachdem

$$\lambda^{\frac{3}{2}} > \text{oder} < 2 H \sqrt{2},$$

je nachdem

$$\lambda^{\frac{3}{2}} > \text{oder} < 4 (H \sqrt{2})^2 = 4 (\lambda^3 - 8 \lambda),$$

je nachdem

$$32 > \text{oder} < 3 \lambda^2,$$

je nachdem

$$\left(\frac{32}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4 \sqrt{2}}{\sqrt{3}} > \text{oder} < \lambda.$$

Bei der Erörterung der Wurzeln der kubischen Gleichung wurde bereits gezeigt, dass im vorliegenden Fall λ kleiner als $\frac{4 \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ist; folglich ist γ grösser als $\frac{3}{4} H$. Demnach setzen wir:

$$\alpha = \frac{3}{4} H - \alpha_1, \quad \gamma = \gamma_1 + \frac{3}{4} H.$$

Die Wurzeln der Gleichung $x^4 - Hx^3 + 2 = 0$ sind:

$$\alpha + \beta \iota, \quad \alpha - \beta \iota; \quad \gamma + \delta \iota, \quad \gamma - \delta \iota.$$

Daraus erhalten wir unter Bildung der Teilbrüche wie in dem Falle, wo die Gleichung (34) abgeleitet wurde:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4(-\alpha_1 + \beta \iota)[(x - \alpha) - \beta \iota]} + \frac{1}{4(-\alpha_1 - \beta \iota)[(x - \alpha) + \beta \iota]} \\ & + \frac{1}{4(\gamma_1 + \delta \iota)[(x - \gamma) - \delta \iota]} + \frac{1}{4(\gamma_1 - \delta \iota)[(x - \gamma) + \delta \iota]}. \end{aligned}$$

Und dies reducirt sich auf die Form:

$$\frac{1}{2(\alpha_1^2 + \beta^2)} \cdot \frac{-\alpha_1(x - \alpha) + \beta^2}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]} + \frac{1}{2(\gamma_1^2 + \delta^2)} \cdot \frac{\gamma_1(x - \gamma) + \delta^2}{[(x - \gamma)^2 + \delta^2]} = \frac{x^2}{x^4 - Hx^3 + 2} \quad (45)$$

Durch Multiplication beider Seiten dieser identischen Gleichung mit

$$x^4 - Hx^3 + 2,$$

und durch Gleichsetzung der Coefficienten von x^3 finden wir:

$$0 = \frac{-\alpha_1}{2(\alpha_1^2 + \beta^2)} + \frac{\gamma_1}{2(\gamma_1^2 + \delta^2)};$$

und daraus

$$\frac{H\alpha_1}{8(\alpha_1^2 + \beta^2)} = \frac{H\gamma_1}{8(\gamma_1^2 + \delta^2)}.$$

Wenn wir die Gleichung (45) integrieren, erhalten wir:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^4 - Hx^3 + 2} = \frac{-\alpha_1}{4(\alpha_1^2 + \beta^2)} \log [(x - \alpha)^2 + \beta^2] + \frac{\beta}{2(\alpha_1^2 + \beta^2)} \arctan \frac{x - \alpha}{\beta} \\ + \frac{\gamma_1}{4(\gamma_1^2 + \delta^2)} \log [(x - \gamma)^2 + \delta^2] + \frac{\delta}{2(\gamma_1^2 + \delta^2)} \arctan \frac{x - \gamma}{\delta} \quad . \quad . \quad (46)$$

Um jedoch die Geschichte der Excentricität zu bestimmen, müssen wir

$$\frac{x^2 (x - H)}{x^4 - Hx^3 + 2}$$

integrieren, und dies kann wie oben geschehen.

Nach der Gleichung (37) haben wir:

$$\int \frac{x^2 (x - H) dx}{x^4 - Hx^3 + 2} = \frac{1}{4} \log (x^4 - Hx^3 + 2) - \frac{1}{4} H \int \frac{x^2 dx}{x^4 - Hx^3 + 2}.$$

Das gesuchte Integral ist also das folgende:

$$\log e = \int \frac{18 dx}{x} - \frac{25}{2} \int \frac{x^2 (x - H) dx}{x^4 - Hx^3 + 2} \\ = \log x^{18} - \frac{25}{8} \log (x^4 - Hx^3 + 2) + \frac{25}{8} H \int \frac{x^2 dx}{x^4 - Hx^3 + 2} \\ = \log x^{18} - \frac{25}{8} \log (x^4 - Hx^3 + 2) + \frac{25}{4} \left\{ \frac{-H\alpha_1}{8(\alpha_1^2 + \beta^2)} \log [(x - \alpha)^2 + \beta^2] \right. \\ + \frac{H\beta}{4(\alpha_1^2 + \beta^2)} \arctan \frac{x - \alpha}{\beta} + \frac{H\gamma_1}{8(\gamma_1^2 + \delta^2)} \log [(x - \gamma)^2 + \delta^2] \\ \left. + \frac{H\delta}{4(\gamma_1^2 + \delta^2)} \arctan \frac{x - \gamma}{\delta} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

In Zahlen wird dies:

$$e = \frac{Bx^{18}}{[x^4 - Hx^3 + 2]^{\frac{25}{8}}} \times \\ \left\{ \frac{[(x - \gamma)^2 + \delta^2]^{\frac{H\gamma_1}{8(\gamma_1^2 + \delta^2)}} \exp. \left[\frac{H\beta}{4(\alpha_1^2 + \beta^2)} \arctan \frac{x - \alpha}{\beta} + \frac{H\delta}{4(\gamma_1^2 + \delta^2)} \arctan \frac{x - \gamma}{\delta} \right]^{\frac{25}{4}}}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{\frac{H\alpha_1}{8(\alpha_1^2 + \beta^2)}}} \right\} \quad (48)$$

B ist wieder eine willkürliche Constante. Es bleibt nun noch übrig, diese allgemeinen Werte auf Zahlen zu reducieren und die Curve zu zeichnen. Wir setzen $H = 2$, wie in der Zeichnung C, Cap. I. Durch Auflösung der kubischen Gleichung

$$\lambda^3 - 8\lambda - (H\sqrt{2})^2 = \lambda^3 - 8\lambda - 8 = 0$$

finden wir $\lambda = 3.2385$.

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} (\lambda^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0.530. \\
\beta &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (\lambda^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{2}) \sqrt{1 + 2H\sqrt{2} \lambda^{-\frac{3}{2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0.745. \\
\alpha_1 &= \frac{3}{4} H - \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 2.030. \\
\gamma &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 1.532. \\
\gamma_1 &= \gamma - \frac{3}{4} H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0.032. \\
\delta &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (\lambda^{\frac{3}{2}} + H\sqrt{2}) \sqrt{1 - 2H\sqrt{2} \lambda^{-\frac{3}{2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0.265. \\
\frac{H\alpha_1}{8(\alpha_1^2 + \beta^2)} &= \frac{H\gamma_1}{8(\gamma_1^2 + \delta^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0.110. \\
\frac{H\beta}{4(\alpha_1^2 + \beta^2)} &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0.080. \\
\frac{H\delta}{4(\gamma_1^2 + \delta^2)} &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 1.840.
\end{aligned}$$

Wenn man also diese Zahlenwerte einsetzt, lautet die Gleichung (48)

$$e = \frac{Bx^{18}}{[(x^4 - 2x^3 + 2)^{\frac{25}{6}}]} \times \left\{ \frac{\left\{ (x - 1.532)^2 + 0.070 \right\}^{0.110} \exp. \left[0.080 \arctan \left\{ \frac{x + 0.530}{0.745} \right\} + 1.840 \arctan \left\{ \frac{x - 1.532}{0.265} \right\} \right]}{\left\{ (x + 0.530)^2 + 0.555 \right\}^{0.110}} \right\}^{\frac{25}{4}} \quad (49)$$

Nach sorgfältiger Berechnung ist diese Gleichung in der Zeichnung **F** dargestellt. Die Energiecurve von Zeichnung **C** ist ebenfalls eingezeichnet worden, um zu zeigen, in welcher Weise die Excentricitätsschwankungen zu deuten sind. Die Pfeile zeigen an, dass die Excentricität rasch sinkt, wie auch das System in Bewegung kommt, da die Körper sich einander nähern und zusammenfallen wie in der Zeichnung **C**.

Dieser Fall bietet hauptsächlich vom Gesichtspunkt der Dynamik aus ein Interesse, da die Systeme in der Natur wahrscheinlich alle in das Gebiet der Zeichnung **E** fallen; es schien mir aber der Mühe wert, die Excentricitätscurve für beide Fälle zu vervollständigen, in denen die Energiecurve genau bestimmt worden ist.

Während also die Zeichnungen **B** und **E** physikalisch die wichtigsten sind, bieten auch die Zeichnungen **C** und **F** ein bedeutendes dynamisches Interesse.

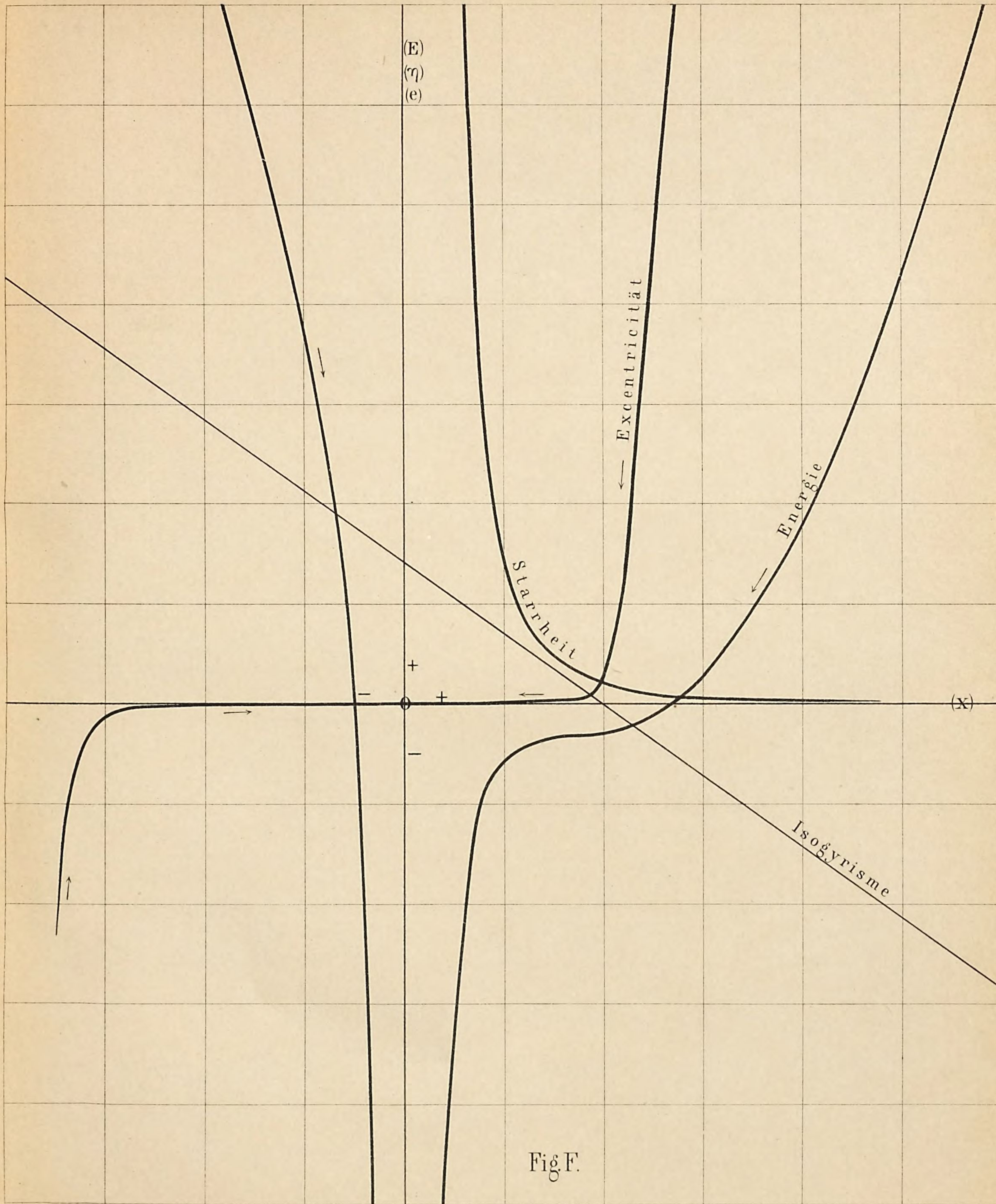


Fig.F.

§ 7. *Numerische Anwendung der analytischen Theorie.*

Nachdem wir in den letzten beiden Capiteln die Theorie gegeben haben für die Wirkung der Gezeitenreibung in einem System, bestehend aus zwei identischen Flüssigkeitssphäroiden von geringer Viscosität und versehen mit gleichmässiger und gleichgerichteter Umdrehung und zwar in derselben Richtung wie die Umlaufbewegung, dürfte es nun wünschenswert sein, eine numerische Anwendung der so entwickelten Theorie zu geben, damit wir eine Anschauung gewinnen können von der Wirkung der physikalischen Ursache, von der wir glauben, dass sie bei der Entwicklung der Doppelsternsysteme so mächtig sich geltend gemacht hat. In Ermangelung einer genauen Kenntnis wirklicher, im Raum existierender Systeme von Doppelsternen und Doppelnebeln, werden wir die Theorie auf einen idealen Fall anwenden, in welchem die Masse eines jeden der beiden Sphäroide dreimal so gross ist als die der Sonne.

Stellen wir uns zwei gleiche, homogene, sphäroidische Flüssigkeitsmassen vor, welche sich umgekehrt wie die Zeiger der Uhr um Axen drehen, welche auf der Bahnebene senkrecht stehen. Das Volumen eines jeden Sphäroides sei gleich dem einer Kugel, deren Radius 5 astronomische Einheiten beträgt; ferner seien die gleichen Winkeldrehungsgeschwindigkeiten der beiden derartig, dass die Ellipsoide eine Excentricität von 0.8 oder eine Abplattung von 0.4 erhalten. Schliesslich nehmen wir an, dass die Anfangsentfernung der Mittelpunkte der beiden Sphäroide des Systems 30 astronomische Einheiten beträgt. Wenn wir uns vorstellen, dass der Mittelpunkt von Helios in dem Mittelpunkt der Sonne liegt, wird der Mittelpunkt von Sol etwa die Bahn des Neptun beschreiben; und die Peripherie des Sphäroides Helios wird sich ein wenig über die Bahn des Jupiter hinaus erstrecken.

Die Dichte der Sonne, auf die mittlere Dichte der Erde bezogen, ist ca. 0.255, und wenn wir die Masse von Helios als dreimal so gross, wie die der Sonne bei dem gleichen Volumen annehmen, wird dessen Dichte 0.765 betragen. Der Sonnendurchmesser beträgt $\frac{1}{109}$ einer astronomischen Einheit. Wenn also Helios' Volumen ausgedehnt wird zu dem einer Kugel mit einem Durchmesser von 10 astronomischen Einheiten, wird das Volumen im Verhältnis von $(109 \times 10)^3 : 1$ wachsen, und die Dichte wird entsprechend abnehmen.

Nun ist

$$(109 \times 10)^3 = 1\,295\,030\,000,$$

und wenn wir diese Zahl durch 0.765 dividieren, erhalten wir 1 692 750 000, was die mittlere Dichte der Erde im Verhältnis zu derjenigen von Helios ist, wenn der Letztere zu einem ungeheuren Nebel ausgedehnt ist, der sich über die Bahn des

Jupiter hinaus erstreckt. Nach den besonderen in Capitel I eingeführten Einheiten haben wir die Masseneinheit gleich

$$\frac{M M'}{M + M'} = 1.5,$$

und die Einheit der Entfernung

$$\Gamma = \left\{ \frac{I(M + M')}{M M'} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{* \frac{2}{5} M a^2 (M + M')}{M M'} \right\}^{\frac{1}{2}} = a \left\{ \frac{4}{5} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

a ist hier der Aequatorradius des Sphäroids, und um Γ zu finden, müssen wir zuerst a ermitteln. Da das Sphäroid dasselbe Volumen hat, wie eine Kugel mit einem Durchmesser von 10 astronomischen Einheiten, können wir schreiben:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi a b c,$$

wo r der Radius der Kugel ist, und a, b, c die Halbaxen des Ellipsoides sind. Bei einem Revolutionsellipsoid haben wir $a = b$, und folglich $r^3 = a^2 c$. Nun ist nach Voraussetzung die Abplattung 0.4;

folglich $c = 0.6 a$ und $a = \frac{r}{(0.6)^{\frac{1}{3}}} = 1.1856 r = 5.9280$ astronomische Einheiten.

Folglich

$$\Gamma = 5.9280 \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{1}{2}} = 5.30216.$$

Der Radiusvector Γ ist so kurz, dass er innerhalb des Sphäroides Helios fällt, und deshalb ein wirklicher Umlauf von Sol in dieser Entfernung physikalisch unmöglich ist, obgleich sich eine Schwierigkeit mathematischer Natur bei der Berechnung der Umlaufszeit nicht bietet. Man kann sich den Umlauf physikalisch denken, wenn man die Massen von Helios und Sol zu Massenpunkten verdichtet sich vorstellt, welche ohne Hindernis in der gegebenen Entfernung mit der erforderlichen Zeitperiode umlaufen würden. Um diese Periode in Jahren zu finden, können wir die bekannte Gleichung für die Bestimmung von Doppelsternperioden anwenden:

$$(M + M') : m = \frac{\Gamma^3}{T^2} : \frac{a^3}{t^2},$$

oder

$$T = \sqrt{\frac{(5.30216)^3}{6}} = 4.9843.$$

Die besondere Einheit der Zeit wird also

$$\theta = \frac{4.9843}{2 \pi} = 0.793274 \text{ Jahre.}$$

* Siehe Williamson's »Integral Calculus«, p. 298, oder irgend ein anderes Werk, das sich mit dem Trägheitsmoment rotierender Körper beschäftigt.

Wir haben ϱ gleich 30 astronomischen Einheiten gewählt; folglich, wenn diese Entfernung durch Γ ausgedrückt wird, haben wir:

$$\varrho = \frac{30}{5.30216} = 5.65807.$$

Nach dem besonderen System von Einheiten ist die Bewegungsgrösse des Umlaufs gleich der Quadratwurzel von ϱ , durch Γ ausgedrückt. Wir haben also

$$x = \Omega^{-\frac{1}{3}} = \varrho^{\frac{1}{2}} = 2.37867.$$

Nun bleiben noch y und z in speciellen Einheiten ausgedrückt zu finden. Dann werden wir H erhalten und eine Zeichnung construieren können, welche die folgende Geschichte des Systems graphisch erläutern wird. Es ist seit lange festgestellt*, dass ein Revolutionsellipsoid eine Gleichgewichtsfigur einer homogenen, incompressiblen Flüssigkeitsmasse ist, die mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit um eine Axe rotiert und nur der Anziehung ihrer Teile unterworfen ist. Die Winkelgeschwindigkeit für eine gegebene Excentricität ist unabhängig von der Menge der Flüssigkeit und proportional der Quadratwurzel aus ihrer Dichte.

Thomson und Tait† haben eine Tabelle berechnet, welche die Umdrehungszeiten (in mittleren Sonnensekunden) eines Sphäroides von derselben mittleren Dichtigkeit wie die Erde für verschiedene Excentricitäten ergiebt; und um die entsprechende Zeit für irgend ein anderes Sphäroid zu erhalten, braucht man nur die so gefundene Tabellenzahl mit der Quadratwurzel derjenigen Zahl zu multiplicieren, welche die mittlere Dichte der Erde durch die Dichte des gegebenen Sphäroides ausdrückt. Für ein Sphäroid von der Dichte der Erde ist die einer Excentricität von 0.8 entsprechende Umdrehungszeit 9697 mittlere Sonnensekunden.

Nun ist

$$(1\,692\,770\,000)^{\frac{1}{2}} = 41144.24,$$

folglich wird Helios' Umdrehungszeit sein

$$(9697) \times (41144.24) \text{ mittlere Sonnensekunden,} \\ \text{oder } 12.6426 \text{ Jahre.}$$

Da Helios' Axengeschwindigkeit sich umgekehrt verhält wie die Umdrehungszeit, ergiebt die besondere Einheit der Zeit

$$y = \frac{4.9843}{12.6426} = 0.394215.$$

Und da $y = z$, so haben wir

$$y + z = 0.78843.$$

* Siehe *Mécanique Céleste*, Livre III, ch. III, §§ 18 — 20, oder Thomson und Tait's *Natural Philosophy*, vol. II, p. 326.

† *Natural Philosophy*, vol. II, p. 327.

Folglich

$$H = x + y + z = 3.1671,$$

und die biquadratische Gleichung lautet

$$x^4 - 3.1671 x^3 + 2 = 0.$$

Die grössere Wurzel dieser Gleichung ergibt das Minimum von Energie und aus diesem Werte für x erhält man sofort die Entfernung, in welcher das System zur Ruhe kommt.

Löst man die biquadratische Gleichung auf, so findet man als grössere Wurzel $x = 3.100$, und da $x = \varrho^{\frac{1}{2}}$, so ist $\varrho = 9.61$, wo T die Einheit ist. Wenn also das System zur Ruhe kommt, ist

$$\varrho = 50.9538 \text{ astronomische Einheiten.}$$

Wir sehen also, dass der säculäre Einfluss der Gezeitenreibung die grössere Axe der Bahn um 20.9538mal die Entfernung zwischen Erde und Sonne vergrössert hat.

Den maximalen Wert der Excentricität ergibt die grössere Wurzel der Gleichung

$$x^4 - 3.1671 x^3 + \frac{36}{11} = 0,$$

als welche man findet $x = 3.052$.

Die maximale Excentricität wird also erreicht wenn

$$\varrho = 9.3147,$$

d. h. wenn die grössere Axe gleich 49.388 astronomische Einheiten ist.

Wir haben nun noch zahlenmässig die maximale Grösse der Excentricität zu ermitteln, und werden zu diesem Zwecke die Methode befolgen, die Prof. Darwin anwendete bei seiner numerischen Untersuchung der Excentricität der Mondbahn vor ungeheuer langer Zeit, als Erde und Mond viel näher beisammen waren als jetzt. Die Aufgabe ist eine wesentlich verschiedene, indem die Excentricität und die grössere Axe im Laufe der Zeit beständig wachsen, während bei der Mondbahn diese Elemente beständig abnehmen, je weiter wir in der Zeit zurückgehen. Mit geringen Aenderungen wird aber die Methode anzuwenden sein, und wir werden auch im Stande sein, den vollständigen Einfluss der doppelten Gezeitenwirkung in Folge der Umdrehungen der beiden Sphäroide zu betrachten.

Die Zeit sei t , und die Marke 0 bei einem Zeichen soll den Anfangswert der Grösse bezeichnen, als $t = 0$ war.

Ferner sei

$$\xi = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\Omega_0}{\Omega}\right)^{\frac{1}{3}},$$

und ε sei die Ellipticität der Bahn, oder

$$\varepsilon = 1 - \sqrt{1 - e^2}.$$

Dann hat Prof. Darwin* bewiesen, dass die säculären Veränderungen in Folge der Wirkung der Gezeitenreibung eines Sphäroides von geringer Viscosität aus den folgenden Differentialgleichungen sich ergeben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi d}{\omega dt} \log \varepsilon &= \frac{11}{2} \sin 4 \epsilon \frac{\tau^2}{\gamma} \left(1 + \frac{27}{2} \varepsilon\right) \left[1 - \frac{18 \Omega}{11 y}\right] \\ \frac{1 d \xi}{\omega dt} &= \frac{1}{2} \sin 4 \epsilon \frac{\tau^2}{\gamma} (1 + 27 \varepsilon) \left[1 - \frac{\Omega}{y}\right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (50)$$

Für ein System von zwei rotierenden Körpern, Helios und Sol, welche identisch sind, lauten die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi d}{\omega dt} \log \varepsilon &= \frac{\xi^h \partial}{\omega dt} \log \varepsilon + \frac{\xi^s \partial}{\omega dt} \log \varepsilon = \frac{11}{2} \sin 4 \epsilon \frac{\tau^2}{\gamma} \left(1 + \frac{27}{2} \varepsilon\right) \left[1 - \frac{18 \Omega}{11 y}\right] \\ &\quad + \frac{11}{2} \sin 4 \epsilon \frac{\tau^2}{\gamma} \left(1 + \frac{27}{2} \varepsilon\right) \left[1 - \frac{18 \Omega}{11 z}\right] \\ \frac{1 d \xi}{\omega dt} &= \frac{1^h \partial \xi}{\omega dt} + \frac{1^s \partial \xi}{\omega dt} = \frac{1}{2} \sin 4 \epsilon \frac{\tau^2}{\gamma} (1 + 27 \varepsilon) \left[1 - \frac{\Omega}{y}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin 4 \epsilon \frac{\tau^2}{\gamma} (1 + 27 \varepsilon) \left[1 - \frac{\Omega}{z}\right] \end{aligned} \right\} (51)$$

Da nach Voraussetzung die beiden Sphäroide gleiche Axenwinkelgeschwindigkeiten haben, kann man y für z einsetzen, und diese Gleichungen für die säculären Veränderungen in Folge der doppelten Gezeitenwirkung reducieren sich auf beinahe dieselbe Form wie diejenigen für ein System, in welchem nur ein Körper sich dreht:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi d}{\omega dt} \log \varepsilon &= 11 \sin 4 \epsilon \frac{\tau^2}{\gamma} \left(1 + \frac{27}{2} \varepsilon\right) \left[1 - \frac{18 \Omega}{11 y}\right] \\ \frac{1 d \xi}{\omega dt} &= \sin 4 \epsilon \frac{\tau^2}{\gamma} (1 + 27 \varepsilon) \left[1 - \frac{\Omega}{y}\right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (50)$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir

$$\frac{\xi d}{d \xi} \log \varepsilon = \frac{11 \left(1 + \frac{27}{2} \varepsilon\right) \left[1 - \frac{18 \Omega}{11 y}\right]}{\xi (1 + 27 \varepsilon) \left[1 - \frac{\Omega}{y}\right]}.$$

Wenn wir diese Gleichung mit $\left(1 + \frac{27}{2} \varepsilon\right)$ multiplicieren, und das kleine von ε^2 abhängige Glied ausser Acht lassen, erhalten wir

* Siehe die Arbeit »On the Secular Changes in the Elements of the Orbit of a Satellite«, Phil. Trans., Part II, 1880, p. 360.

$$\left(1 + \frac{27}{2} \varepsilon\right) \frac{d}{d\xi} \log \varepsilon = \frac{11}{\xi} \frac{\left[1 - \frac{18\Omega}{11y}\right]}{\left[1 - \frac{\Omega}{y}\right]} = \frac{11}{\xi} - \frac{7}{\xi} \frac{\Omega}{y} \text{ (sehr nahe) } . \quad (52)$$

Diese letzte Umwandlung ist nicht ganz genau, da sie annimmt, dass $\frac{\Omega}{y}$ im Vergleich zu Eins klein ist; für unsern hier zu betrachtenden Fall kommen wir der völligen Genauigkeit nahe genug. Wenn wir bei der Integration (52) das zweite Glied auf jeder Seite ausser Acht lassen, erhalten wir als ersten Annäherungswert

$$\log \varepsilon = \log \xi^{11} + \log \varepsilon_0, \\ \text{oder} \\ \varepsilon = \varepsilon_0 \xi^{11} (53)$$

Aber das strenge Integral, welches sich von ξ_0 (welches Eins ist) bis ξ erstreckt, ist

$$\int_1^\xi \left(1 + \frac{27}{2} \varepsilon\right) d \log \varepsilon = \int_1^\xi \left[\frac{11}{\xi} - \frac{7\Omega}{\xi y}\right] d\xi.$$

Der Annäherungswert von ε in (53) ergibt für den zweiten Ausdruck des Integrals der linken Seite

$$\int_1^\xi \frac{27}{2} \varepsilon d \log \varepsilon = \frac{27}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) = -\frac{27}{2} \varepsilon_0 (1 - \xi^{11}) \text{ annähernd.}$$

Folglich haben wir als einen zweiten Annäherungswert

$$\int_1^\xi d \log \varepsilon = \frac{27}{2} \varepsilon_0 (1 - \xi^{11}) + \int_1^\xi \left[\frac{11}{\xi} - \frac{7\Omega}{\xi y}\right] d\xi.$$

$$\log_e \varepsilon = \frac{27}{2} \varepsilon_0 (1 - \xi^{11}) + \log_e \varepsilon_0 \xi^{11} - 7 \int_1^\xi \frac{\Omega d\xi}{\xi y}.$$

Und da

$$\Omega = \Omega_0 \xi^{-3},$$

lautet diese Gleichung:

$$\log_e \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 \xi^{11}}\right) = \frac{27}{2} \varepsilon_0 (1 - \xi^{11}) - 7 \Omega_0 \int_1^\xi \frac{d\xi}{\xi^4 y} (54)$$

Das Integral in diesem Ausdruck ist von sehr geringer Bedeutung, doch dürfte es wünschenswert sein, wenigstens einen annähernden Wert zu bestimmen. Nach der gewöhnlichen Theorie der elliptischen Bewegung ist die Bewegungsgrösse von Helios und Sol in Bezug auf das gemeinsame Trägheitscentrum des Systems

proportional der Quadratwurzel des latus rectum der Bahn. Nach der gegenwärtigen Bezeichnung ist die Bewegungsgrösse gleich

$$\frac{I \xi (1 - \varepsilon)}{\bar{\omega}}.$$

Welche Wirkung auch die beiden Sphäroide auf einander gegenseitig ausüben mögen, es bleibt doch die ganze Bewegungsgrösse des Systems constant. Folglich ist

$$H = I \left\{ \frac{\xi (1 - \varepsilon)}{\bar{\omega}} + y + z \right\} = I \left\{ \frac{\xi_0 (1 - \varepsilon_0)}{\bar{\omega}} + y_0 + z_0 \right\}.$$

Wenn nun die Excentricität nicht sehr gross ist, sind die von den Ellipticitäten abhängigen Ausdrücke der Gleichung so überaus klein, dass sie unberücksichtigt bleiben können. Und wir erhalten

$$y + z = y_0 + z_0 + \frac{1}{\bar{\omega}} \{ \xi_0 - \xi \}.$$

Da aber

$$\xi_0 = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

und man immer y für z setzen darf, so reduciert sich diese Gleichung auf

$$2y = 2y_0 + \frac{1}{\bar{\omega}} (1 - \xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Es sei

$$2\bar{\omega}y + 1 = \kappa,$$

so dass

$$2y = \frac{1}{\bar{\omega}} (\kappa - \xi);$$

dann ist der letzte Ausdruck von (54) annähernd gleich:

$$\begin{aligned} -14\bar{\omega}\Omega_0 \int_1^\xi \frac{d\xi}{\xi^4 (\kappa - \xi)} &= 14\bar{\omega}\Omega_0 \left\{ \frac{1}{3\kappa} \left(\frac{1}{\xi^3} - 1 \right) + \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{1}{\xi^2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\kappa^3} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \right\} - \frac{14\bar{\omega}\Omega_0}{\kappa^4} \log \left(\frac{\xi y_0}{y} \right). \end{aligned}$$

In diesem letzten Ausdruck ist $2y$ für $\frac{(\kappa - \xi)}{\bar{\omega}}$ geschrieben worden.

Nun sei

$$K = \left\{ \frac{1}{3\kappa} \left(\frac{1}{\xi^3} - 1 \right) + \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{1}{\xi^2} - 1 \right) + \frac{1}{\kappa^3} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \right\} 14\bar{\omega}\Omega_0 + \frac{27}{2} \varepsilon_0 (1 - \xi^{11}).$$

Dann ist

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \xi^{11} \left(\frac{y}{y_0 \xi} \right)^{\frac{14\bar{\omega}\Omega_0}{\kappa^4}} e^K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Um die Veränderungen der Excentricität zu bestimmen, bleibt nun nichts mehr zu thun, als die Formel auf Zahlen zu reducieren. Die Integration ist zu erstrecken von $\varrho = 30$ bis $\varrho = 49.388$; deshalb ist

$$\xi = \left(\frac{49.388}{30} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.28336.$$

Bezeichnet man das Anfangsverhältnis der Bewegungsgrösse des Umlaufs zu derjenigen der Umdrehung durch ζ , dann ist

$$\zeta = \frac{x_0}{y_0 + z_0} = \frac{2.37867}{0.78843} = 3.01697.$$

Ferner*

$$2 \bar{\omega} y_0 = \frac{1}{\zeta} = 0.33146;$$

und da

$$x = 2 \bar{\omega} y_0 + 1,$$

so sehen wir, dass

$$x = \frac{1 + \zeta}{\zeta} = 1.33146.$$

Wir berechnen $\bar{\omega} \Omega_0$ mittelst der Formel

$$\bar{\omega} \Omega_0 = \frac{2 \bar{\omega} y_0 \Omega_0}{2 y_0} = \frac{\Omega_0}{2 y_0 \zeta} = 0.0311646.$$

Um $\frac{y}{y_0}$ zu bestimmen, müssen wir y , die Axenwinkelgeschwindigkeit des Sphäroides, bestimmen, wenn

$$\varrho = 49.388,$$

oder wenn

$$x = 3.0521.$$

Nun folgt aus der Unveränderlichkeit der Bewegungsgrösse, dass

$$(2 y_0 - 2 y) = x - x_0 = 3.0521 - 2.37867 = 0.67343;$$

oder

$$y_0 - y = 0.33671.$$

Und da

$$y_0 = 0.394215,$$

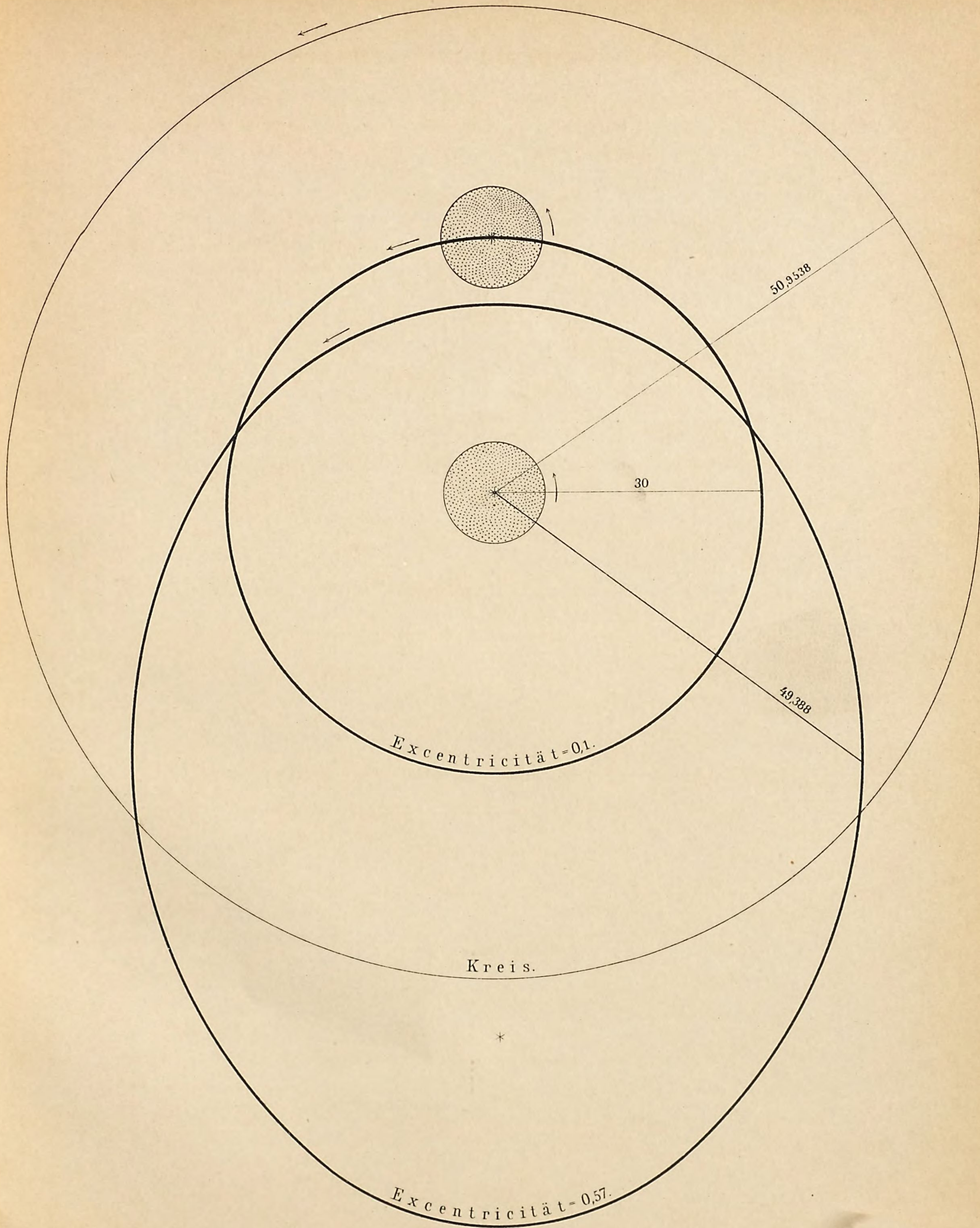
ergiebt sich, dass

$$y = 0.057505 \text{ und } \frac{y}{y_0} = 0.145874.$$

Wir finden ferner

$$\bar{\omega} = 0.41988 \text{ und } \bar{\omega} \Omega_0 = 0.031126.$$

* In Prof. Darwin's Arbeit »On the Secular Changes in the Elements of the Orbit of a Satellite«, p. 860, ist die Grösse $\bar{\omega}$ mit k bezeichnet, und, wie bewiesen wird, gleich $\frac{1}{2 \mu y_0}$, wo μ dem ζ der vorliegenden Arbeit entspricht. Es schien ratsam, die Bezeichnung der Gleichmässigkeit halber ein wenig zu ändern.



Benutzen wir diese verschiedenen Werte, so haben wir

$$\left(\frac{y}{y_0 \xi}\right)^{\frac{14 \cdot 6 \Omega_0}{x^4}} = 0.73915.$$

Der Ausdruck für K (in beinahe derselben Form wie hier) wurde ursprünglich entwickelt bei Untersuchung der Excentricität der Mondbahn zu Zeiten, die in weiter Vergangenheit liegen, wo der Mond der Erde näher war als jetzt, und ξ deshalb kleiner als Eins war, und die Ausdrücke für K alle positiv waren. In unserem Fall ist ξ durch Eins (wobei K verschwindet) hindurchgegangen, und grösser als Eins geworden; deshalb sind die Ausdrücke negativ. Da uns aber nur die absoluten Werte angehen, müssen wir offenbar alle ihre Vorzeichen entweder ausser Acht lassen oder ändern. Denn im vorliegenden Falle wächst ξ mit der Zeit, wie es auch die Excentricität thut, und die Veränderungen sind deshalb entgegengesetzt denjenigen, die in der Integration gesucht wurden, für welche die Gleichungen ursprünglich angesetzt worden sind. Wenn wir die Vorzeichen der Ausdrücke von K ausser Acht lassen, so ist also die Gleichung unmittelbar für den zu betrachtenden Fall anwendbar.

$$K = 0.14652 + \frac{27}{2} \varepsilon_0 (1 - \xi^{11}).$$

Um den zweiten Ausdruck von K zu ermitteln, ist es nötig, ε_0 , welches die Anfangs-Ellipticität der Bahn des Systems ist, irgend einen Wert beizulegen. Nehmen wir an, die Anfangs-Excentricität sei 0.1, dann ist

$$\varepsilon_0 = 1 - \sqrt{1 - e_0^2} = 0.00501.$$

Folglich

$$K = 0.14652 + 0.98446 = 1.13088.$$

Reducieren wir die übrigen Glieder der Gleichungen auf Zahlen, so finden wir

$$e = 0.178462;$$

und da

$$e = \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2},$$

so erhalten wir schliesslich

$$e = 0.57025.$$

Wir sehen also, wie die halbe grosse Axe beständig von 30 auf 49.388 astronomische Einheiten zunimmt, auch die Excentricität von 0.1 bis 0.57 wächst, eine Excentricität, die erheblich grösser ist als die mittlere (0.45) in den Doppelsternbahnen. Aus diesem Zahlenbeispiel ersehen wir, dass die säculäre Gravitationswirkung in Folge der Gezeitenreibung eine völlig ausreichende Erklärung liefert für die bei den Doppelsternsystemen beobachteten grossen Excentricitäten; und da wir später zeigen werden, dass diese Bahnen ursprünglich nahezu kreisrund waren, folgt daraus unstreitig, dass die mächtige physikalische Ursache, welche in der Verlängerung der Doppelsternbahnen eine so sichtbare Spur ihrer Wirkung hinterlassen hat, in der

säculären Gravitationsreaction in Folge der körperlichen Gezeitenreibung zu suchen ist. Im vorliegenden idealen System nimmt die Excentricität ab, nachdem sie ein Maximum erreicht hat, wenn die halbe grosse Axe 49.388 astronomische Einheiten beträgt, und die Bahn wird kreisförmig, wenn das System schliesslich die Configuration minimaler Energie erreicht, wo die halbe grosse Axe 50.9538 mal so lang ist, wie die Entfernung von der Erde zur Sonne, und das System weiter kreist, als wäre es starr verbunden.

Es braucht nur noch hinzugefügt zu werden, dass das hier behandelte Idealsystem den typischen, im Raum existierenden Doppelsternsystemen zwar ziemlich nahe steht, dass aber nach der Theorie die Resultate unter anderen Verhältnissen natürlich nicht genau dieselben werden, und wir deshalb finden, dass die Excentricitäten der Doppelsternbahnen in verschiedenen Fällen in weiten Grenzen differieren. Es sei bemerkt, dass für die Excentricitäten eine Neigung zu bestehen scheint, grösser zu werden, falls die ursprüngliche Bahn nicht äusserst kreisförmig ist, und dass in Fällen unendlich kleiner Anfangs-Excentricitäten die Bahn sich wahrscheinlich sehr weit ausdehnt, ohne dabei sehr excentrisch zu werden. Eine sehr ausgezogene Bahn, wie die von γ Virginis, kann also davon herrühren, dass die Anfangs-Excentricität etwas grösser war als gewöhnlich (0.2 dürfte wohl ungefähr das Maximum einer Anfangs-Excentricität sein), während verhältnismässig kreisförmige Bahnen (wenn solche existieren) das Resultat unendlich kleiner, beim Teilungsprocess den Bahnen ursprünglich verliehener Excentricitäten sein dürften. Es giebt noch andere greifbare Umstände und Ursachen (wie der Entwicklungszustand, in dem sich das System gegenwärtig befindet, oder der Widerstand eines Mediums, welcher die Excentricität beständig vernichtet), welche die Gestalt der Bahnen hervorbringen könnten, wie man sie in jedem gegebenen Zeitpunkt sieht. Die hier entwickelte Theorie stimmt also mit den beobachteten Thatsachen vollkommen überein und giebt eine völlig ausreichende Erklärung sowohl für die kleineren als die grösseren Excentricitäten der Doppelsternbahnen.

CAPITEL III.

ENTSTEHUNG DER DOPPELSTERNE AUS DOPPELNEBELN.

§ 1. *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen.*

»Il est très probable que les nébuleuses sont formées d'une matière lumineuse très rare, répandue en amas divers dans l'espace céleste, et dont la condensation successive a produit les étoiles et toutes les variétés qu'elles présentent. * * *

La condensation des nébuleuses à deux noyaux forme semblablement des étoiles très rapprochées, tournant l'une autour de l'autre, pareilles à celles dont Herschel a déjà considéré les mouvements respectifs.«

Laplace.

Eine homogene Flüssigkeitskugel ohne Drehung ist immer im Gleichgewicht, welches auch die gegenseitige Anordnung der Teilchen unter einander sein mag. Versetzt man diese Kugel in langsame Drehung um irgend eine Axe, so wird sie ein Sphäroid. Hier können wir wieder annehmen, dass die Teilchen ihre Plätze vertauscht haben ohne irgendwelche Störung des Gleichgewichtes. Wir können dieses homogene Sphäroid betrachten, als wäre es zusammengesetzt aus übereinanderliegenden, unendlich dünnen Schichten, welche alle dieselbe Ellipticität besitzen. Wird die Rotation des Sphäroides beschleunigt, dann wächst seine Ellipticität und die Ellipticitäten aller Schichten nehmen gleich schnell zu. Die Teilchen einer heterogenen Flüssigkeitskugel ohne Rotation befinden sich im Gleichgewicht einzig und allein, wenn sie so angeordnet sind, dass die Dichtigkeit vom Mittelpunkt nach der Oberfläche hin abnimmt. Eine solche Kugel ist zusammengesetzt aus aufeinander folgenden, unendlich dünnen Schichten von gleichartiger Dichtigkeit, aber die einzelnen Schichten nehmen immer an Dichtigkeit vom Mittelpunkt nach der Oberfläche ab.

Wenn nun die heterogene Kugel in langsame Drehung versetzt wird, geht sie in ein Sphäroid über, und alle Schichten werden sphäroidisch. Aber in diesem Falle der Heterogenität behalten die Schichten nicht, wie im Falle der Homogenität, dieselbe Ellipticität vom Mittelpunkt nach der Oberfläche. Die Ellipticitäten wachsen, wie es von Laplace im zweiten Bande seiner *Mécanique Céleste** mathematisch

* Livre III, Ch. IV, § 30.

festgestellt ist. Also befolgen die Ellipticitäten der Schichten eines heterogenen flüssigen Sphäroids im Gleichgewicht ein Gesetz umgekehrt wie die Dichtigkeiten*.

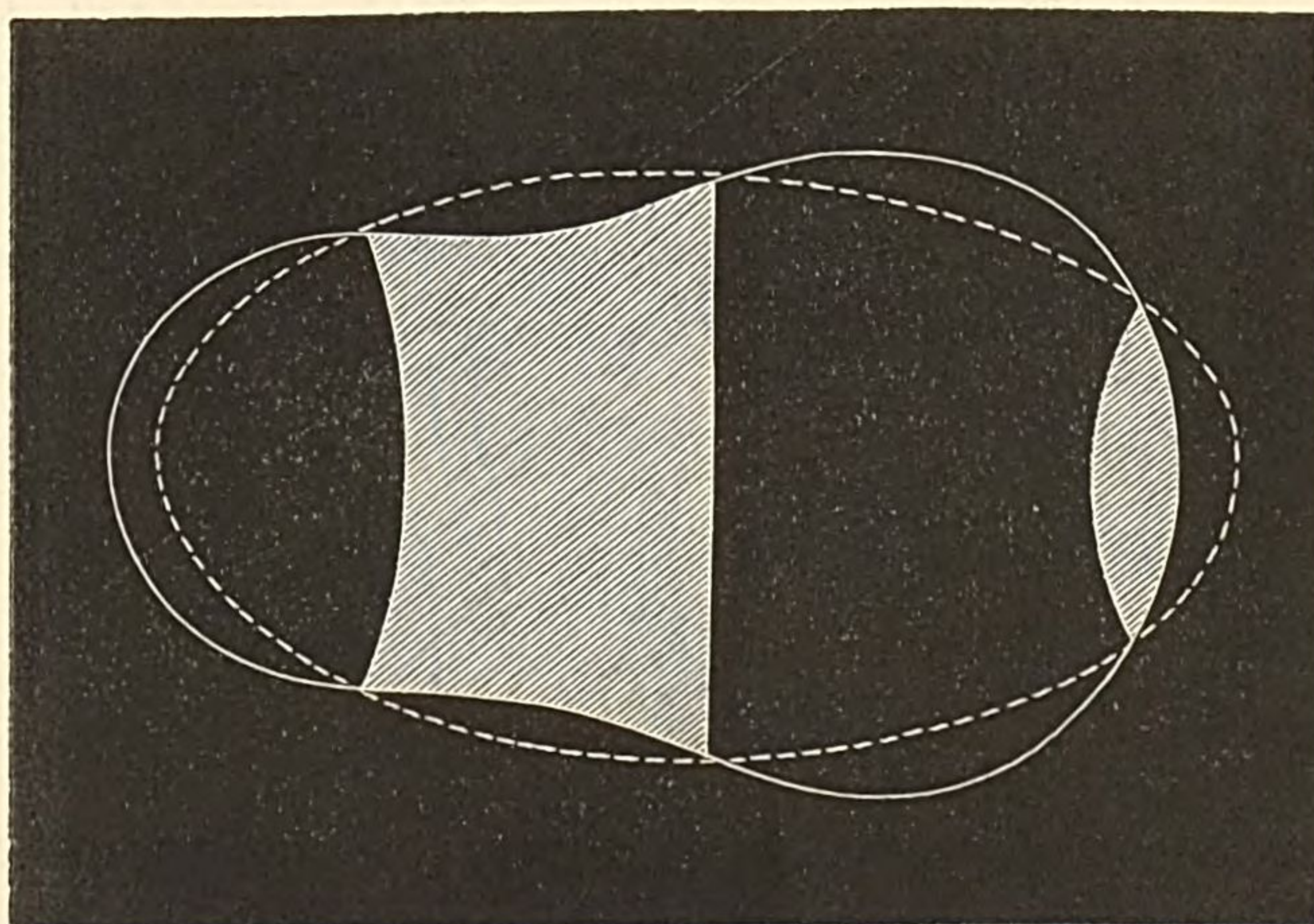
Da die Ellipticitäten, wenn der Körper in Ruhe ist, gleich Null sind, ist es klar, dass eine Beschleunigung der Axendrehung sie alle erhöhen wird, bis eine gewisse Grenze erreicht ist. Aber alle Ellipticitäten werden nicht gleich schnell zunehmen; die Ellipticitäten der äusseren, minder dichten Schichten werden immer rascher und rascher zunehmen gegenüber den dichteren und minder elliptischen Schichten am Mittelpunkt. Die Verschiedenheit der Ellipticitäten steigt also mit der Beschleunigung der Umdrehung. Bei gegebener Drehungsgeschwindigkeit wächst die Verschiedenheit mit der Zunahme der Heterogenität.

Nachdem dies festgestellt ist, wollen wir einige andere Gleichgewichtsfiguren betrachten. Ueberall in dieser Erörterung nehmen wir natürlich an, dass für die Anziehung das Newton'sche Gesetz gilt. In den bis jetzt bestimmten Gleichgewichtsfiguren haben beinahe alle Forscher wegen mathematischer, gegenwärtig fast unüberwindlicher Schwierigkeiten angenommen, dass die Flüssigkeit homogen sei.

Unter den nach dieser Voraussetzung festgestellten Figuren befindet sich das Jacobi'sche Ellipsoid mit drei ungleichen Axen.

M. H. Poincaré hat die Dynamik des Jacobi'schen Ellipsoids mit besonderer Sorgfalt erörtert und die Stabilität des Gleichgewichtes streng untersucht (Acta Mathematica, Band VII). Er findet, dass, so wie die Drehungsgeschwindigkeit des Revolutionsellipsoids zunimmt, dasselbe sich allmählich abplattet, und wenn die Ellipticität ungefähr gleich $\frac{2}{5}$ geworden ist, hört es auf, ein Revolutionsellipsoid zu sein, und wird ein Jacobi'sches Ellipsoid, welches bei weiterer Beschleunigung der Umdrehung vollständig aufhört, ein Ellipsoid zu sein, und in die beifolgende Figur übergeht.

Fig. 2.



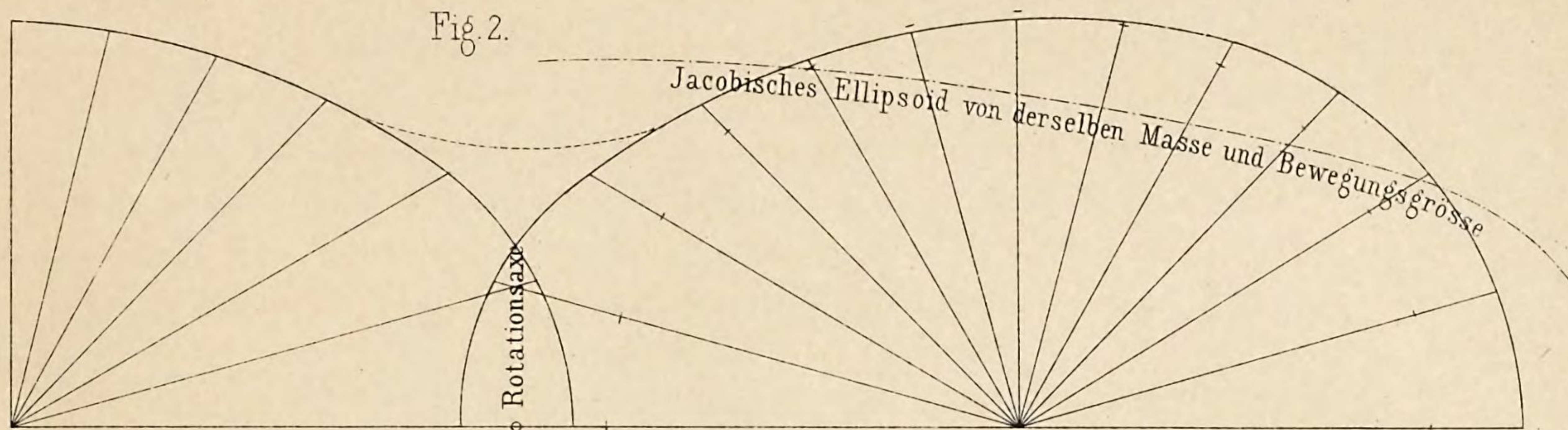
M. Poincaré's Aploid.

Fig. 2 stellt einen Durchschnitt der Poincaré'schen Figur dar, welche nach ihrer Aehnlichkeit mit einer Birne Aploid (von $\tau\acute{o}$ $\acute{\alpha}\pi\iota\omicron\nu$ die Birne und $\epsilon\acute{\iota}\delta\omicron\varsigma$ Ge-

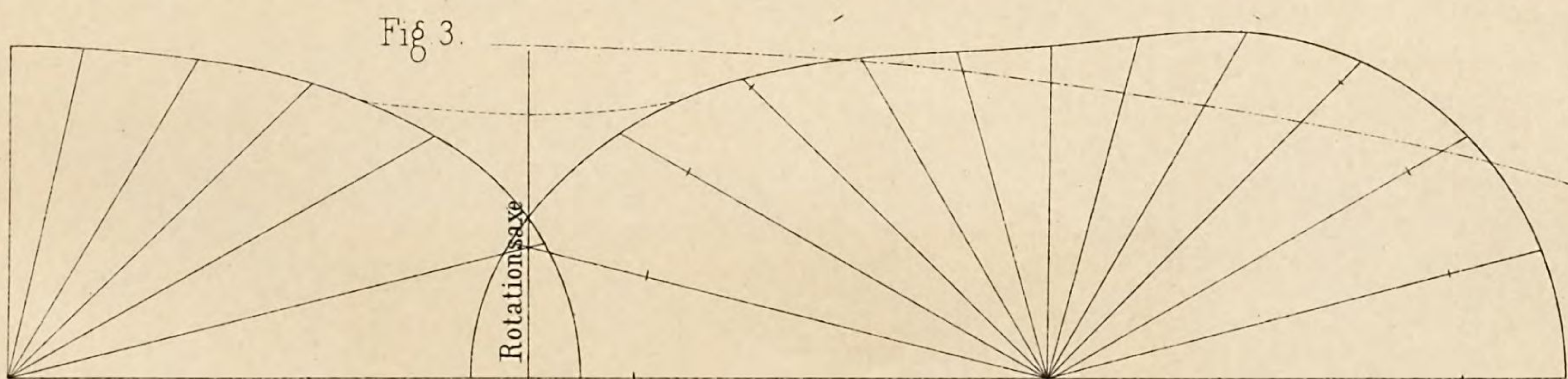
* Sir John Herschel hat beobachtet, dass gewisse elliptische Nebel thatsächlich dieses Gesetz zu bestätigen scheinen. (Phil. Trans. 1833, p. 501.)

(Darwin's Figuren.)

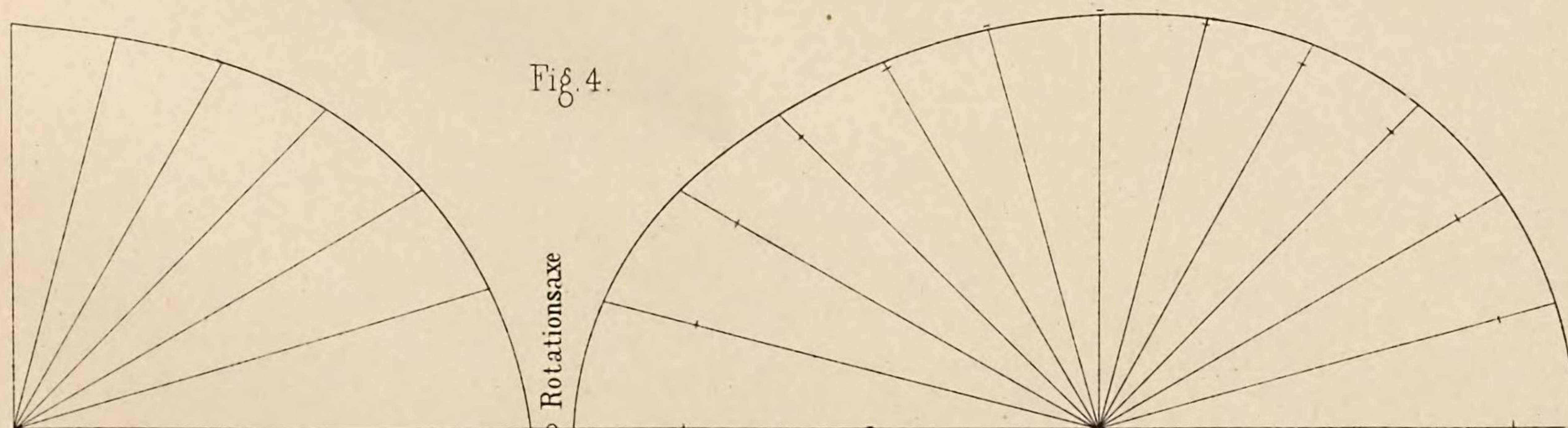
Hantelförmige Gleichgewichtsfigur.
Durchschnitt senkrecht zur Rotationsaxe.



Durchschnitt durch die Rotationsaxe hindurch.



Gleiche Massen beinahe berührend.
Durchschnitt senkrecht zur Rotationsaxe.



12. 1871
The first of the year
was a very dry one
and the crops were
very poor.

The second of the year
was a very wet one
and the crops were
very good.

The third of the year
was a very dry one
and the crops were
very poor.

The fourth of the year
was a very wet one
and the crops were
very good.

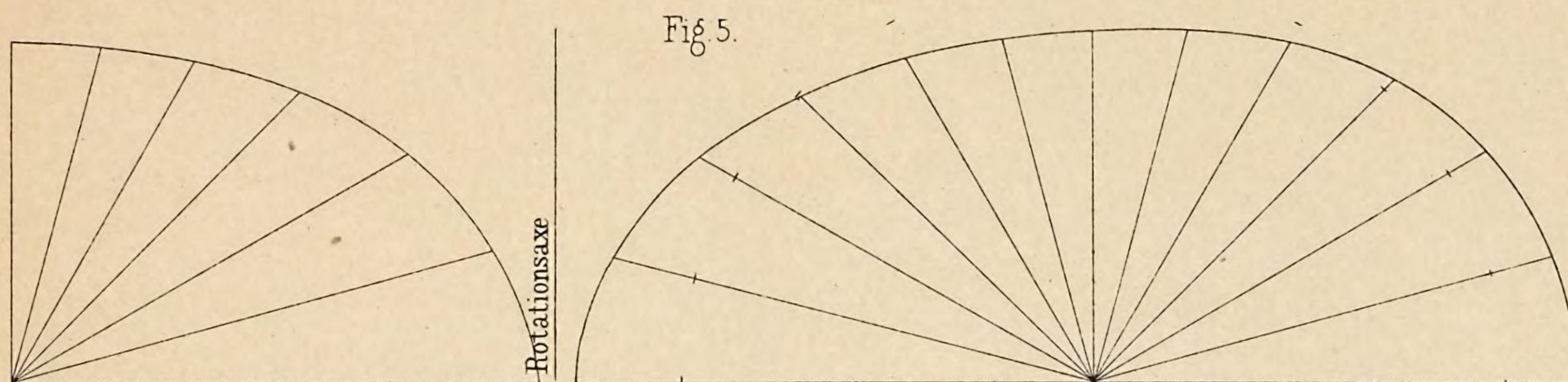
The fifth of the year
was a very dry one
and the crops were
very poor.

The sixth of the year
was a very wet one
and the crops were
very good.

The seventh of the year
was a very dry one
and the crops were
very poor.

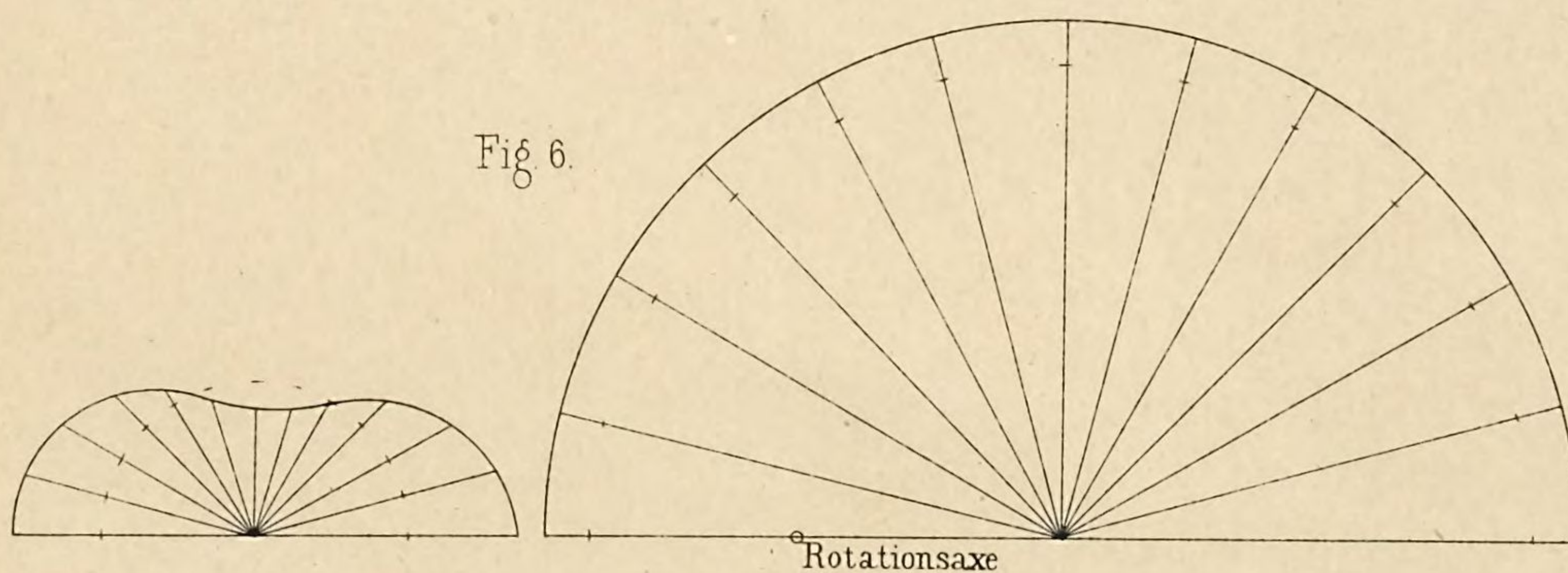
(Darwin's Figuren.)

Durchschnitt durch die Rotationsaxe hindurch.

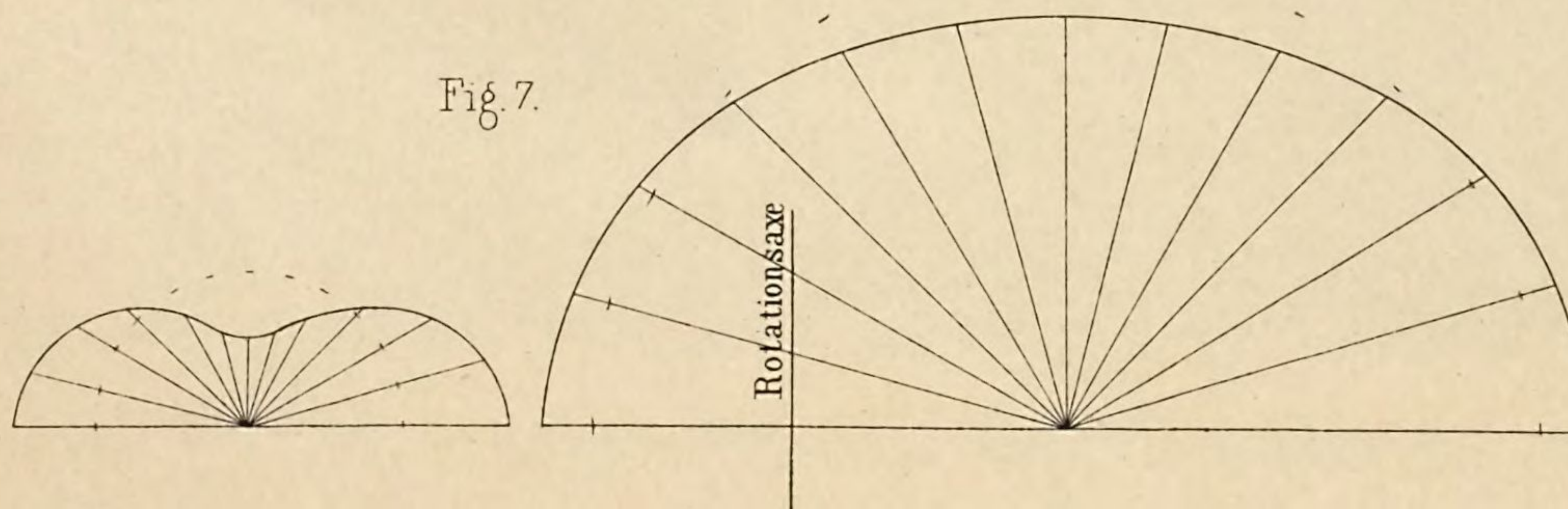


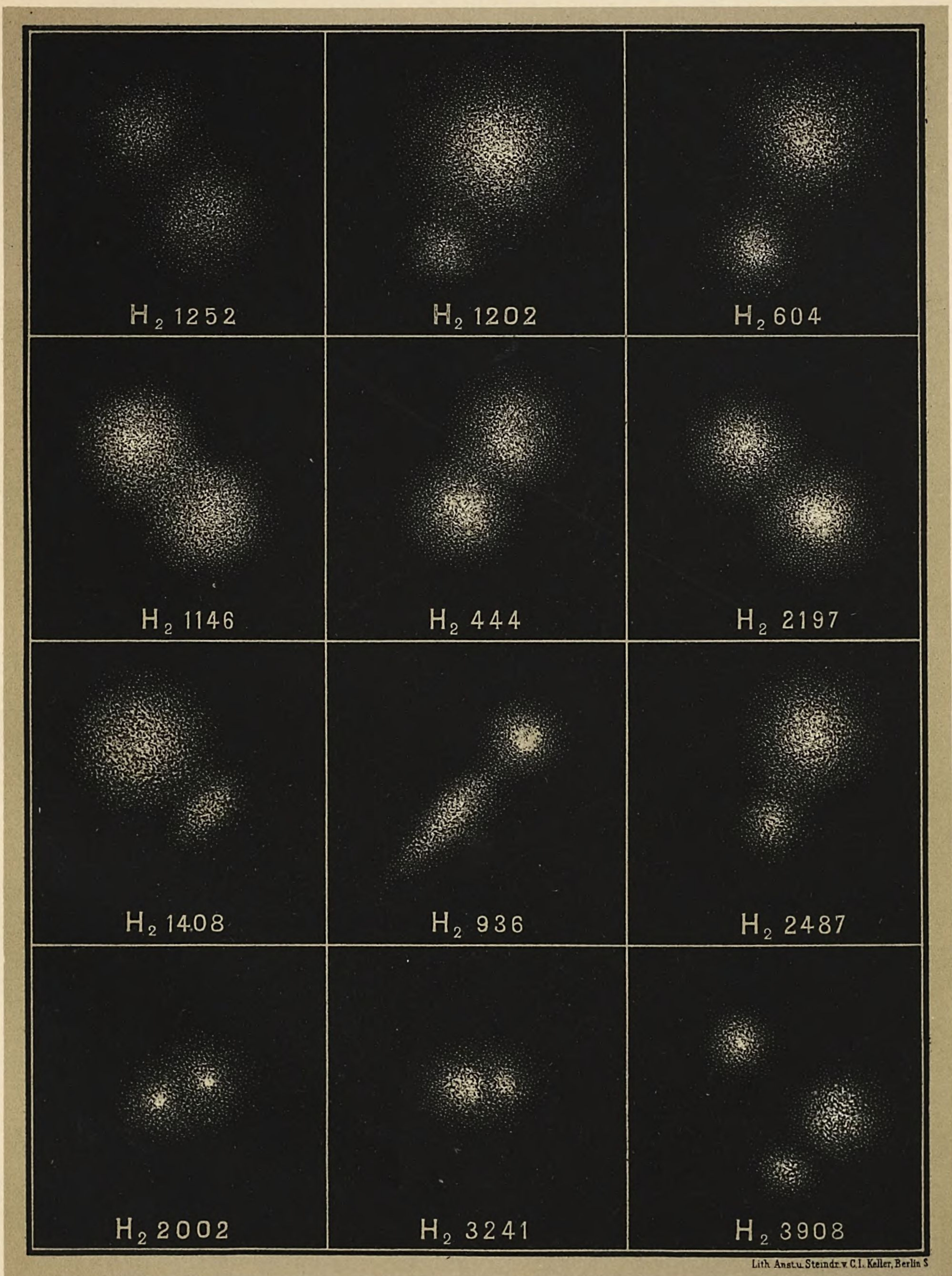
Ungleiche Massen.

Durchschnitt senkrecht zur Rotationsaxe.



Durchschnitt durch die Rotationsaxe hindurch.





Nebeltafel nach Sir John Herschel's Zeichnungen.

stalt) genannt werden mag, und zwar einen Schnitt durch die längste und kürzeste Axe (entsprechend den respectiven, ähnlichen Axen im Ellipsoid). Die Einschnürung des Jacobi'schen Ellipsoids, parallel zu seinem kleinsten Durchschnitt, weist, wie M. Poincaré andeutet, auf eine Neigung des Körpers hin, sich in zwei comparable Massen zu spalten. Das grössere Ende der Masse strebt danach, mehr kuglig zu werden, während das kleinere sich von der Urmasse zu trennen strebt. In dem durch Figur 2 dargestellten Zustand ist das Gleichgewicht streng stabil.

Prof. Darwin hat unabhängig davon die von M. Poincaré erzielten Resultate bestätigt. Die Aufgabe war, die Formen zu untersuchen, welche zwei flüssige Massen annehmen, wenn sie in nächster Nähe sich umeinander bewegen ohne Bewegung ihrer Teile gegen einander, und die Gleichgewichtsfiguren zu bestimmen, welche entstehen müssen, wenn die zwei Massen sich soweit einander nähern, um eben zu einer einzigen Masse zu verschmelzen. Die durch sehr schwierige Analyse erzielten Resultate sind in den folgenden Tafeln gegeben. (Wegen Einzelheiten der Originalarbeit muss der Leser die Phil. Trans. für 1887 einsehen.) Die von Prof. Darwin verfolgte Methode ist also wesentlich der Poincaré'schen entgegengesetzt, aber die im Wesentlichen identischen Schlüsse, zu denen man auf zwei verschiedenen Wegen gelangt, machen das Resultat um so befriedigender. Ohne Bedenken können wir also glauben, dass, wenn die Masse sich durch beschleunigte Umdrehung spaltet, das zwischen den Teilen bestehende Verhältnis im Allgemeinen durch einen grossen Bruch ausgedrückt wird. M. Poincaré's Aploid ergibt ein Massenverhältnis von ungefähr 1:4, während Prof. Darwin's Resultate ergeben, dass das Verhältnis im Falle der Homogenität nicht kleiner sein kann, als 1:30, und gewöhnlich viel grösser sein wird. Durch diese Untersuchungen suchten sowohl M. Poincaré als Prof. Darwin die Nebelhypothese von Laplace zu bestätigen oder zu widerlegen, aber das aus den Untersuchungen sich ergebende Massenverhältnis schien so wenig anwendbar auf das Planetensystem, dass die Forscher am Schlusse ihrer wertvollen Arbeiten einige Enttäuschung ausdrücken. Die Urheber dieser gründlichen dynamischen Untersuchungen hatten aber beständig das Sonnensystem im Auge, und machten folglich keinen Versuch, die Resultate auf andere Systeme in der Natur anzuwenden. Wir werden deshalb ihre Bedeutung bei Anwendung auf das Weltall im Ganzen untersuchen, und das wird uns dazu führen, die im Raume existierenden Dopplsterne und Doppelnebel zu betrachten.

§ 2. *Doppelnebel.*

Bevor wir fortfahren, möge der Leser die obigen Figuren mit Sir John Herschel's Zeichnungen von Doppelnebeln* vergleichen, die wir in der Nebeltafel wiedergegeben haben. Man vergleiche M. Poincaré's Aploid mit den von Sir John Herschel numerierten Nebeln 1252, 1202, 604, 1146, 442, 2179, 1408, 936, 2487,

* Siehe Phil. Trans. 1833, und »Results of Observations at the Cape of Good Hope«.

2002, 3241, 3908, und man wird sich wohl kaum der Folgerung verschliessen können, dass die obigen mathematischen Resultate am Himmel durch Beispiele belegt sind. Absolut homogene Nebel existieren natürlich nicht; man hat jedoch reichlich Grund für die Annahme, dass in vielen Fällen die Abweichung von der Homogenität nicht sehr ausgesprochen ist.

Wenn der Nebel nicht in erheblichem Maasse heterogen ist, können wir annehmen, dass die Poincaré'schen und Darwin'schen Figuren in der Hauptsache das darstellen, was eintreten würde, sowie die Gravitationscontraction fortschreitet. Und wir können die Figur eines in der Entwicklung begriffenen Nebels als momentan, aber nicht säculär stabil ansehen wegen der beständigen Abgabe von Energie und der daraus folgenden Contraction. Wir sehen also, dass, wenn der Nebel homogen ist, nach der Spaltung das zwischen seinen Teilen herrschende Verhältniss ein grosser Bruch sein wird, etwa ein Halb, ein Drittel oder ein Viertel, oder kleiner, oder womöglich unter gewissen Bedingungen gleich Eins. Die obigen mathematischen Untersuchungen scheinen zu zeigen, dass im Allgemeinen die Massen nicht ganz gleich sein werden, aber immer comparabel, d. h. von derselben Ordnung. Wenn die Heterogenität nicht sehr beträchtlich ist, wird nach der Spaltung des Mutternebels dasselbe relative Massenverhältniss sich beinahe erhalten. Man hat Grund zu glauben, dass viele von den Nebeln nicht sehr heterogen sind, und wir sollten deshalb eine Trennung in comparable Massen erwarten. Mit dieser theoretischen Folgerung stimmt die grosse Zahl* von Doppelnebeln und Doppelsternen, die thatsächlich am Himmel beobachtet worden sind, überein. Je grösser die Heterogenität, desto grösser ist die Verschiedenheit im Massenverhältniss von dem bei Homogenität herrschenden. Dies folgt klar aus dem, was wir an anderer Stelle über die Concentration der Dichtigkeit am Centrum des Mutternebels gesagt haben, sowie über die Zunahme in den Ellipticitäten der Schichten, sowie wir uns der Oberfläche nähern. Denn der abgestossene Teil wird hauptsächlich von den peripherischen Lagen der Muttermasse stammen; und selbst, wenn das abgelöste Volumen dasselbe Verhältniss zu dem Muttervolumen behalten sollte, wie bei Homogenität, würde doch die Masse zu der Muttermasse in viel kleinerem Verhältniss stehen, wegen der geringeren Dichtigkeit des abgelösten Theiles. In der That ist es aber leicht einzusehen, dass sowohl die abgespaltene Masse wie das Volumen bei Heterogenität kleiner sein wird. Wenn der Nebel sehr heterogen ist, müsste der abgelöste Teil zu dem Centralkörper in sehr kleinem Massenverhältniss stehen.

Mit Bezug auf das Planetensystem dürfte diese Schlussfolgerung bedeuten, dass unser Urnebel, als die Planeten sich bildeten, sehr heterogen war. Nach dieser Hypothese ersieht man, dass unser merkwürdiges System, welches aus einer Sonne und zahlreichen, sehr kleinen, in nahezu kreisförmigen Bahnen sich bewegendenden Planeten besteht, einen besonderen Fall darstellt — den aus einem äusserst heterogenen Nebel sich ergebenden —, offenbar eine Ausnahme in dem gewöhn-

* Von den 5079 durch Sir John Herschel im Jahre 1864 registrierten Nebeln fand sich ein Sechszehntel als doppelt.

lichen Gang kosmischer Entwicklung, wonach die Nebel sich erst zu Doppelnebeln ausbilden und dann zu Doppelsternsystemen. Bisher ist das Massenverhältnis der Bestandteile von Sternsystemen nur in wenigen Fällen durch directe Messungen befriedigend bestimmt worden. Wenn wir aber die Doppelsterne als Classe betrachten, werden wir nicht erheblich irren, wenn wir annehmen, dass das Massenverhältnis der Lichtmenge, die wir empfangen, entspricht, und diese kann aus der Grösse der Sterne bestimmt werden. In besonderen Fällen wird diese Methode, die relativen Massen der Sterne eines Systems aus ihren Grössen zu folgern, zweifellos versagen. Und im Allgemeinen dürfte der so berechnete Wert ein wenig zu klein sein; er würde sich jedoch in grober Schätzung der Wirklichkeit nähern.

Es muss bemerkt werden, dass wir nicht annehmen, dass der Nebel von Anfang an absolut homogen und symmetrisch sei. Die Verdichtung kann an mehreren Centren beginnen (obgleich gewöhnlich eines das Hauptcentrum sein wird), oder die Nebelmasse kann entstehen aus der Vereinigung von Centren, die sich nahe bei einander im Raume gebildet haben. Das einzige Postulat für den Fall verschmelzender Nebel ist dieses, dass sie sich zu einer Masse vereinigen sollen, deren Gleichgewichtsfigur durch den Druck und die Anziehung ihrer Teile bestimmt wird. Wenn die Masse so vereinigt ist, können die dichteren Partien der beiden Nebel sich an einem gemeinsamen Centrum ansammeln, und die lockeren Partien sich in Schichten nach ihrer Dichtigkeit um dasselbe anordnen; oder (was wahrscheinlicher ist) die beiden dichten Centren können bis zu gewissem Grade in der gemeinschaftlichen rotierenden Masse ihre Selbständigkeit bewahren, und wenn die Umdrehung in Folge der Contraction genügend beschleunigt ist, so dass die Centrifugalkraft die Schwere überwindet, sich wieder sehr langsam von einander trennen. Denn aus der Natur der Nebelcontraction selbst können wir mit Sicherheit entnehmen, dass die Beschleunigung in der Drehungsgeschwindigkeit langsam und stetig fortschreitet, — da giebt es keine plötzlichen Sprünge oder Pausen. Unter diesen Umständen ist es sicher, dass die Trennung sehr langsam stattfindet, und wir können ohne Bedenken behaupten, dass in der Regel viele Umläufe vollendet werden, während der Spaltungsprocess vor sich geht. Da eine plötzliche Beschleunigung der Umdrehung unmöglich ist, sehen wir ein, dass die Bahn, welche die abgelöste Masse zu beschreiben beginnt, nahezu kreisrund sein muss. Wäre die Bahn sehr excentrisch, dann würde die Einwirkung des grösseren Körpers bald die kleinere Masse zu einem meteorischen Schwarm reducieren, und einmal zu einem Gürtel ausgezogen, könnte sie sich niemals zu einem Stern verdichten. Da aber die abgelöste Masse in eine fast kreisförmige Bahn geschleudert wird, könnte die Wirkung des grösseren Körpers den kleineren Schwarm niemals zu einem Meteorring ausbreiten; und da die Verdichtung zugleich fortschreitet, würde derselbe der Auflösung entgehen, wenn schliesslich die Bahn durch die säculären Einflüsse der Gezeitenreibung ausgezogen und stark excentrisch würde. Wenn die Massen sich nicht vollständig trennen (wie es offenbar in Herschel's Nebeln 1252, 1202, 604 und 1146 der Fall ist), sind ihre Umdrehungen und Umläufe ohne Zweifel beinahe synchron. Aber die Energieabgabe beider Massen

lässt bald die Gravitationscontraction eintreten, und dadurch wird die Winkelgeschwindigkeit der Axendrehung grösser als die des Umlaufs, und dann beginnt die Gezeitenreibung einzuwirken. Unter diesen Verhältnissen verkleinert die Gezeitenreibung zuerst die Excentricität; aber wenn 11 Umläufe gleich 18 Umdrehungen sind, hört die Verkleinerung auf, und indem die Umdrehung immer rascher und rascher wird, vergrössert die Gezeitenreibung fortan sowohl die grössere Axe als die Excentricität der Bahn. Und im Allgemeinen werden diese Elemente weiter wachsen, bis wieder 18 Umdrehungen in derselben Zeit erfolgen, wie 11 Umläufe. Wenn dieser Zustand erreicht ist, haben wir das Maximum der Excentricität. Nachher reducirt sich die Excentricität wieder sehr langsam bis auf Null durch die säculäre Wirkung der elliptischen und Halbumlaufsgezeiten und der Libration. Der starre Zustand wird wahrscheinlich erst erreicht, wenn beide Körper völlig dunkel geworden sind, da die Winkelgeschwindigkeit fortfährt sich zu beschleunigen, so lange als Contraction stattfindet. Wenn jedoch schliesslich dieser Zustand erreicht ist, werden die Sterne einander immer dieselben Flächen zukehren, und das System wird weiterkreisen, als wäre es für immer starr verbunden, wenn nicht äussere Gewalten oder ätherischer oder meteorischer Widerstand einwirken. Diese Ansichten über die säculäre dynamische Instabilität haben auch ein besonderes Interesse, wenn man sie auf Systeme des Algol-Typus anwendet, wo beide Körper nicht nur sehr gross, sondern auch sehr nahe bei einander und die Gezeiten also aller Wahrscheinlichkeit nach enorm sind. Nach dem Gesagten leuchtet es ein, dass die Astronomen bisher die Bedeutung der Gezeitenreibung als einer formativen Kraft in der Geschichte des Weltalls gewaltig unterschätzt haben. Sie hat gewiss einen deutlichen Eindruck auf die Bahnen der Sternsysteme hinterlassen, und selbst in dem Falle des Sonnensystems hat sie einigen Einfluss ausgeübt. Deshalb hege ich kein Bedenken, die Gezeitenreibung als eine der wichtigsten Kräfte anzusprechen, die in der Entwicklung der verschiedenen Systeme des Kosmos wirksam sind.

Die eben kurz beschriebene Theorie stimmt in sehr befriedigender Weise mit dem bei Doppelnebeln und Doppelsternsystemen beobachteten, grossen Massenverhältnis überein. Sie erklärt auch sehr glücklich die Entwicklung der Excentricitäten der Sternbahnen.

Eine Untersuchung, welche eine befriedigende Erklärung für die grossen Excentricitäten der Sternbahnen, das grosse Massenverhältnis der Bestandteile giebt und eine innige Verbindung der Doppelsterne mit den Doppelnebeln herstellt, begründet eine zusammenhängende Theorie, welche, wie mir scheint, einigen Anspruch auf Annahme haben dürfte.

§ 3. *Allgemeiner Gang der kosmischen Entwicklung.*

Wenn die vorliegende Theorie irgend einen Leser ob ihrer Consequenzen stutzig macht, muss man sich erinnern, dass wir nicht die Entwicklung des Planetensystems behandeln, sondern versuchen, zu der normalen Form des Entwicklungs-

processes am Himmel zu gelangen, und das kann nur geschehen durch das Studium der Doppelnebel und Doppelsternsysteme, da unser Planetensystem sehr merkwürdig ist, und zwar von Grund aus verschieden von allen anderen bisher entdeckten Sternsystemen. Wir behaupten nicht, dass Systeme von der Art des Sonnensystems nicht anderswo im Weltenraum existieren, sondern nur, dass wir keine Kenntnis von ihnen haben, und es wäre offenbar unlogisch, unsere Verallgemeinerungen anders, als auf bis jetzt wirklich beobachtete Phänomene zu stützen*.

Wir behaupten also lediglich, dass das Sonnensystem das einzige bisher bekannte System ist, das aus einer sehr grossen Anzahl sehr kleiner Körper besteht, die sich alle in fast kreisförmigen Bahnen um eine grosse centrale Sonne bewegen, die einer viel grösseren Massenordnung angehört, als alle begleitenden Planeten zusammengenommen. Die Sonne hat eine Masse 750mal so gross wie alle Planeten und Satelliten zusammengenommen, also beinahe die ganze Masse des Urnebels ist in der Sonne. Die Zahl der Körper in den Sternsystemen ist gewöhnlich klein, indem die überwiegende Mehrzahl der Systeme — wenigstens neunzehntel — nur Doppelsterne sind; jedoch sind einige dreifach und vierfach. Die Sternsysteme im Allgemeinen scheinen nur aus zwei Körpern — zwei ungeheuren Sonnen — zu bestehen, und dass Massenverhältnis ist eine so grosse Bruchzahl, dass nicht der massigere Stern, wie bei uns, das ganze System beherrscht. Denn was die Massenverteilung anbetrifft, ist das System wesentlich ein doppeltes. Man hat auch Grund zu glauben, dass in der Regel nicht viele kleine, dunkle Körper, nach Art der Planeten, sich in diesen Doppelsystemen befinden; denn selbst wenn sie sich einmal gebildet hätten, könnten sie sich doch schwerlich in Systemen erhalten, wo die Anziehung so compliciert ist. Und nach dem Entwicklungsprocess, wie er sich bei Doppelnebeln zeigt, und nach den Forschungen von M. Poincaré und Prof. Darwin ist es wahrscheinlich, dass im Allgemeinen nur zwei Körper aus der Teilung einer einzigen Masse hervorgehen dürften. Es ist wahrscheinlich, dass in einigen Fällen die Massen sich wieder teilen, wie es in dem Apoid stattfindet, und eine solche Spaltung wird um so viel leichter entstehen wegen der Störungen des Gleichgewichtes, welche von den grossen körperlichen Gezeiten herrühren. In diesem Falle würde ein dreifaches oder vierfaches System entstehen, je nachdem sich eine oder beide Massen wieder in zwei Hälften spalten.

Wenn diese Ansichten über die Entwicklung der Sterne richtig sind, können wir an das Problem der Entstehung des Sonnensystems von einem neuen Gesichtspunkt herantreten — vom Fixsternhimmel aus. Bei der Besprechung der Untersuchung von M. Poincaré in ihrer Anwendung auf sehr heterogene Massen, haben wir bereits bemerkt, dass die abgelöste Masse sehr klein sein müsste. Manches im Planetensystem deutet darauf hin, dass der Sonnennebel sehr heterogen war zur Zeit, als die Planeten gebildet wurden. Wenn dies wirklich richtig ist, erhebt sich

* Der Jupiter in der Distanz des α Centauri würde in unseren grössten Fernröhren unsichtbar bleiben, und deshalb kann eine grosse Anzahl von solchen unbedeutenden (dunkeln) Körpern im Sternhimmel sich bewegen, ohne beobachtet oder durch Störungen entdeckt zu werden.

mancher Zweifel darüber, ob es notwendig ist, anzunehmen, die Planeten wären von dem Sonnennebel durch allmähliche Ausscheidung von Ringen gebildet, wie Laplace es auffasst. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die Abscheidung vielmehr in Form von Klumpen oder umfangreichen Massen, als in Ringen stattgefunden habe. Die Ringe des Saturn werden immer als Beispiel angeführt für die Richtigkeit der Nebelhypothese; und doch erscheint es unglaublich, dass diese Ringe sich ursprünglich mit ihrer ganzen gegenwärtigen Regelmässigkeit, Symmetrie und Dünne gebildet haben können. Von Clerk Maxwell ist nachgewiesen worden, dass diese Ringe nicht die Eigenschaften einer Flüssigkeit haben könnten, sondern aus getrennten festen Teilchen bestehen müssten, so dass die Ringe lediglich ein Schwarm von losen Steinen sind. Warum können wir also nicht annehmen, dass die Masse, aus welcher diese Ringe bestehen, bei ihrer ursprünglichen Ablösung mehr oder weniger umfangreich und unregelmässig war, und dass die (kleine) Anfangs-Excentricität der Bahn und der Einfluss der Satelliten die Meteoriten dieser losen Masse ausgebreitet haben zu den Ringen, die wir jetzt sehen?

Es ist beinahe feststehend, dass die gegenwärtigen Ringe niemals einen Satelliten bilden können, sondern dass sie langsam durch innere Zusammenstösse der Meteoriten an Energie verlieren und sich so den Planeten nähern. Der Zerfall der Asteroiden-Masse in eine Unzahl von kleinen Körpern (denn die Zahl kleiner Planeten scheint jetzt unendlich zu sein), dürfte auf dieselbe Weise zu erklären sein. Wenn die Asteroiden-Masse bei der Ablösung nicht ein Ring, sondern ein mehr oder weniger unregelmässiger Klumpen war, würde der mächtige, störende Einfluss des Jupiter die Bahn, in welcher sich diese Masse bewegen würde, ausserordentlich excentrisch erhalten, selbst wenn keine dauernde Zunahme der Excentricität eintrete. Unter diesen Verhältnissen könnte die Centralmasse die Asteroiden-Masse leicht zu einem Ring verzetteln; und die Verdichtung zu einem Planeten würde dadurch unmöglich gemacht. Einige Annehmbarkeit wird dieser Ansicht verliehen durch die ungewöhnlich grossen Excentricitäten der Asteroiden-Bahnen und durch die grosse Breite der Zone, über welche hin die Körper verstreut sind. In der Breite der Zone liegt eine starke Analogie mit den Ringen des Saturn, und die Aehnlichkeit wird ferner erhöht durch die »Gruppen«, in welche die Asteroiden durch die Anziehung des Jupiter geschleudert worden sind; die auf einander folgenden Abteilungen oder Gruppen entsprechen den Abteilungen in den Ringen des Saturns, welche ohne Zweifel von den Störungen durch Satelliten mit commensurablen Perioden herrühren.

Die Saturnringe und die Asteroiden sind aber so verschieden von den andern Teilen des Sonnensystems, dass sie in der planetarischen Entwicklung Ausnahmen scheinen; und wir dürfen vielleicht einschliessen, dass in diesen zwei Fällen Ringe (mehr oder weniger vollkommen) wirklich abgeschleudert worden sind. Folglich sehen wir ein, warum sie sich nie zu einzelnen Körpern verdichtet haben*, wie diejenigen mehr oder weniger kugelförmigen Massen, welche die Planeten und

* Siehe auch Newcomb's Ansichten in seiner »Popular Astronomy«, p. 508.

Satelliten bildeten. Ausserdem hat die störende Anziehung des Jupiter auf die Asteroiden-Masse mächtig eingewirkt, und die Condensation dabei so verhindert, dass statt einer einzelnen Masse eine ganze Menge von sehr kleinen Körpern zwischen dem Mars und dem Jupiter kreisen.

Laplace nahm an, dass sich die Ringe des Sonnennebels zu Planeten verdichtet haben, und die Ringe der Planeten zu Satelliten; dies ist nicht möglich, wenn die Bahnen Anfangs in erheblichem Grade excentrisch waren. Dies Letztere ist durchaus nicht wahrscheinlich, aber die Bahnen müssen je eine bestimmte Excentricität gehabt haben. Und wie klein auch diese Excentricitäten gewesen sein mögen, so müssen sie doch bis zu diesem Grade der Verdichtung der Ringe zu Planeten entgegengewirkt haben. Es ist begreiflich, dass, wenn die Ringe etwas unregelmässig, aber vollkommen kreisrund waren, sie vielleicht im Verlaufe ungeheurer Zeiträume sich verdichten könnten, obgleich es höchst zweifelhaft scheint. Es ist völlig gewiss, dass, wenn die planetarischen Körper als etwas unregelmässige Massen sich bildeten und nahezu Kreisbahnen beschrieben, sie sich zu Planeten verdichten mussten. Deshalb sollten wir im Lichte des gewöhnlichen Trennungsprocesses, wie er sich bei den Doppelnebeln zeigt, den ringbildenden Process nach den Begriffen von Laplace sehr skeptisch ansehen. Die Ringe sind zweifellos ideell möglich, jedoch im höchsten Grade unwahrscheinlich*; Ringe wurden zwar neuerdings durch Mr. Roberts auf photographischem Wege in dem grossen Andromedanebel entdeckt, sie sind aber ziemlich unregelmässig, und nehmen in einigen Fällen mehr die Form von Massen als von Ringen an. Es ist unmöglich zu sagen, wie diese Anschauungen über Laplace's Theorie Anderen erscheinen werden, mir wenigstens scheinen sie haltbar zu sein; und ich gebe mich der Hoffnung hin, dass die in diesem Capitel vorgebrachten Ansichten den Astronomen nahe legen werden, von wie grosser Wichtigkeit es ist, die Doppelnebel sorgfältig zu studieren und zu photographieren. Diese Weltkörper scheinen seit der Zeit Sir John Herschel's sehr vernachlässigt worden zu sein, welcher ihnen grosse Aufmerksamkeit schenkte und ihr eigentümliches Interesse würdigte.

§ 4. *Die Doppelsternbahnen.*

Die folgende Tabelle giebt alle Doppelsterne, deren Bahnen berechnet worden sind. Einige der Bahnen sind ziemlich unsicher aus Mangel an Uebereinstimmung der Beobachtungen und wegen der Kleinheit der Bögen, auf welchen die Berechnungen basieren. Die Bahnen aber, die gegeben werden, sind mit grosser Sorgfalt ausgewählt, und ich habe mich bemüht, für jedes System die beste Bahn zu geben, die gegenwärtig zu erlangen ist. Die meisten hier aufgenommenen Bahnen sind

* Im Weltall kommen Ringnebel bekanntlich äussert selten vor, Doppelnebel und Spiralnebel im Gegenteil sehr häufig, aber die letzteren sind nicht in dieser Untersuchung behandelt, da ihre wahren Gestalten im Raum unbekannt bleiben.

Elemente der Doppelsternbahnen.

S t e r n	Autorität	<i>e</i> Excen- tricität	<i>a</i> " Halb- axe	<i>U</i> Umlaufs- zeit	<i>T</i> Epoche	Ω Knoten	λ Winkel d. Periastron	γ Nei- gung
α Canis Minoris (Procyon)	Auwers, 1861	0.000(?)	1.0525	39.972	. .	. .	. .	. . ?
<i>O. Σ 269</i>	Gore, 1892	0.0575	0.58	47.70	1883.12	51.933	43.51	82.81
9 Argûs = β 101	Glasenapp, 1892	0.090	0.45	40.54	1844.02	116.7	251.3	59.2
ζ Cancrî = Σ 1196 — <i>CD</i>	Seeliger, 1888	0.1106	0.217	17.60	1860.127	71.96	109.68	17.35
ξ Scorpii = Σ 1998 — <i>AB</i>	Schorr, 1889	0.1220	1.3093	105.195	1862.324	10.45	102.628	67.644
β 612	Glasenapp, 1892	0.13	0.28	30.00	1874.01	317.3	31.6	23.0
221 Ophiuchi = Σ 2173	Dunér, 1876	0.1349	1.009	45.43	1872.91	152.65	7.26	80.53
40 σ^2 Eridani — <i>BC</i>	Gore, 1886	0.136	5.99	139.0	1863.9	146.333	354.384	76.333
<i>O. Σ 387</i>	Glasenapp, 1889	0.139	0.54	110.10	1916.5	150.9	99.1	43.9
ζ Sagittarii	Gore, 1886	0.1698	0.53	18.7	1882.9	83.366	263.35	58.8
α Pegasi	Glasenapp, 1892	0.20	0.21	11.54	1898.8	125.66	199.90	65.98
δ Equulei = <i>O. Σ 535</i>	Wrublewsky, 1887	0.2011	0.406	11.478	1892.03	24.05	26.6	81.75
μ^1 Herculis = Σ 2220 — <i>BC</i>	Leuschner, 1889	0.2139	1.369	45.39	1880.142	62.11	181.1	67.01
12 Lyncis = Σ 948 — <i>AB</i>	Gore, 1887	0.229	1.64	485.80	1716.0	166.50	93.6	46.03
14 ι Orionis = <i>O. Σ 98</i>	Gore, 1887	0.2465	1.22	190.48	1959.05	99.583	302.7	44.95
η Coronae Borealis = Σ 1937	Doberck, 1880	0.2667	0.892	41.562	1850.792	25.71	218.36	59.68
Σ 186	Glasenapp, 1891	0.300	0.90	150.8	1752.61	55.21	192.4	72.1
Σ 1819	Casey, 1882	0.3052	1.46	340.1	1797.0	156.42	348.93	35.51
Σ 3121	Celoria, 1887	0.3086	0.6725	34.6488	1878.52	24.847	129.454	75.436
δ Cygni = Σ 1279	Gore, 1890	0.327	2.39	376.659	1914.16	98.666	175.116	41.433
β Delphini = β 151	Gore, 1885	0.337	0.517	30.91	1882.25	3.633	327.783	59.333
85 Pegasi = β 733	Schaeberle, 1889	0.35	0.96	22.3	1884.0	306.1	70.3	68.6
<i>O. Σ 234</i>	Gore, 1886	0.3629	0.339	63.45	1881.15	124.19	71.96	47.35
ζ Cancrî = Σ 1196 — <i>AB</i>	Seeliger, 1888	0.3824	0.86	59.12	1868.12	80.19	109.735	11.135
γ Coronae Borealis = Σ 1967	Doberck, 1877	0.387	0.75	95.5	1843.7	111.0	239.0	83.0
167 Herculis = Σ 2107	Berberich, 1884	0.387	1.00	186.207	1893.33	186.33	104.05	45.86
ξ Ursae Majoris = Σ 1523	Pritchard, 1878	0.416	2.58	60.80	1875.26	100.22	235.0	56.66
66 Piscium = <i>O. Σ 20</i>	Glasenapp, 1889	0.416	0.48	136.2	1901.4	103.7	167.8	16.1
γ Coronae Australis = <i>H₂ 7714</i>	Gore, 1892	0.4244	2.55	154.41	1876.84	77.27	175.29	35.6
π Cephei = <i>O. Σ 489</i>	Glasenapp, 1889	0.434	1.10	198.4	1945.0	46.0	117.5	45.0
<i>O. Σ 215</i>	Gore, 1890	0.4346	0.73	107.94	1905.80	39.316	58.65	65.85
λ Ophiuchi = Σ 2055	Glasenapp, 1888	0.4424	1.53	373.5	1787.9	105.5	152.5	38.1
Σ 3062	Doberck, 1879	0.4472	1.270	102.943	1835.508	39.15	92.11	32.18
Σ 1757	Gore, 1887	0.4498	2.05	276.92	1791.98	87.6	185.383	40.933
<i>O. Σ 149</i>	Glasenapp, 1889	0.460	0.55	85.9	1915.1	141.2	347.3	31.1
4 Aquarii = Σ 2729	Doberck, 1880	0.4613	0.717	129.84	1751.96	340.23	235.0	56.61

Supplement - Tabelle.

Be- wegung	Bogen	Zeit	Grössen	Licht- Verhältnis	A n m e r k u n g e n
+	. .	. .	1.0 . .	. .	Begleiter unsichtbar. Kreisförmige Bahn angenommen.
+	$2\pi^0$	46	7.2 7.7	1 : 1.585	Bahn provisorisch. Neigung gross und Excentricität klein.
+	170	17	5.6 6.7	1 : 2.76	Messungen sehr gut dargestellt.
—	8π	70	6.0 . .	. .	<i>D</i> unsichtbar und wahrscheinlich sehr gross.
+	200	53	4.9 5.2	1 : 1.318	Dreifach und stark geneigt. <i>C</i> scheint sich negativ zu bewegen.
+	140	14	6.0 6.0	1 : 1	Bahn befriedigend für ein so enges System.
—	$2\pi +$	45	5.8 6.1	1 : 1.318	Bahn stark geneigt, aber gut bestimmt.
—	200	100	9.0 11.0	1 : 6.31	Stern weicht von der Bahn ab. Masse 2.4 die der Sonne.
—	130	46	7.2 8.2	1 : 2.512	Messungen mässig gut dargestellt. [etwas länger.
—	224	14	3.5 4.1	1 : 1.585	Bahn scheint sehr gut, aber die Umlaufszeit ist wahrscheinlich
—	2π	12		. .	Messungen mässig gut dargestellt. Paar sehr eng.
—	$2\pi +$	12	4.1 5.0	1 : 2.29	Bahn noch etwas unsicher.
+	284	31	9.5 10.5	1 : 2.512	System dreifach.
—	55	105	5.2 6.1	1 : 2.29	Dreifach.
—	60	45	6.0 6.8	1 : 2.09	Messungen mässig gut dargestellt.
+	$4\pi +$	98	5.2 5.7	1 : 1.585	Bahn zuverlässig.
+	167	65	7.2 7.2	1 : 1	Darstellung der Messungen befriedigend.
—	80	55	7.9 8.0	1 : 1.097	Berberich hält dieses System für optisch!
+	242*	26*	7.5 7.8	1 : 1.318	System eng und schwierig, aber die Bahn scheint mässig genau.
—	125	104	3.0 8.0	1 : 100.0	Beobachtungen mässig gut dargestellt.
+	$180\pm$	12	3.5 11.0	1 : 1000	Umlaufszeit ungefähr 30 Jahre; Bahn noch etwas unsicher.
+	222	11	6.0 11.0	1 : 100.0	Nach Brünnow's Parallaxe beträgt die Masse 11.3 die der Sonne!
+	$180\pm$	42	7.0 7.4	1 : 1.445	Bahn nur provisorisch. Messungen sehr schwer.
—	$4\pi -$	107	5.0 5.7	1 : 1.905	<i>AB</i> mit <i>CD</i> bilden ein vierfaches System.
—	344	61	4.0 7.0	1 : 15.85	Nach Gore geht die Bahnebene durch die Sonne hindurch.
+	88	55	6.5 8.0	1 : 3.982	Messungen mässig gut dargestellt.
—	$3\pi^+$	97	4.0 5.5	1 : 3.982	Bahn sehr gut; eine der besten.
—	70	46	5.9 7.0	1 : 2.76	Beobachtungen ziemlich genau dargestellt.
—	221	58	5.5 5.5	1 : 1	Messungen gut dargestellt. Bewegung um das Periastron der
+	40	43	5.2 7.5	1 : 8.317	Messungen nahezu dargestellt. [Bahn herum.
—	52	46	6.7 7.2	1 : 1.585	Darstellung der Beobachtungen sehr gut.
+	147	105	4.0 6.0	1 : 6.31	Bahn mässig gut.
+	346	95	6.9 8.0	1 : 2.76	Umlaufszeit vielleicht etwas länger.
+	63	61	7.8 8.9	1 : 2.76	Alle bisherigen Messungen mittelmässig dargestellt.
—	92	46	6.5 9.0	1 : 10.0	Messungen mässig gut dargestellt.
+	180	105	5.9 7.2	1 : 3.311	Umlaufszeit wahrscheinlich etwas zu kurz.

* Bogen und Zeit, die vom Rechner benutzt wurden; die älteren Messungen sind vernachlässigt worden.

Elemente der Doppelsternbahnen.

S t e r n	Autorität	e Excen- tricität	α'' Halb- axe	U Umlaufs- zeit	T Epoche	Ω Knoten	λ Winkel d. Periastron	γ Nei- gung
ζ Herculis = Σ 2084	Doberck, 1880	0.4666	1.345	34.411	1864.78	44.1	251.783	44.533
42 Comae Berenices = Σ 1728	O. Struve, 1874	0.480	0.657	25.71	1859.92	11.0	99.183	90.0±
70 Ophiuchi = Σ 2272	Gore, 1888	0.4912	4.50	87.84	1807.65	120.083	171.75	58.466
μ Draconis = Σ 2130	Berberich, 1884	0.493	3.38	648.0	1940.35	. . .	275.433	0.000
$O. \Sigma$ 4	Glasenapp, 1889	0.506	0.53	135.2	1967.9	16.6	284.1	61.0
61 Cygni = Σ 2758	Mann, 1890	0.529	23.90	462.0	1661.42	170.0	133.0	62.283
Σ 228	Gore, 1889	0.5311	0.98	88.73	1906.03	84.82	51.6	70.98
α Centauri	Doberck, 1879	0.5332	18.45	88.536	1875.12	25.53	45.96	79.4
ω Leonis = Σ 1356	Doberck, 1876	0.53789	0.864	115.30	1841.99	147.1	122.9	64.15
$O. \Sigma$ 298	Celoria, 1888	0.5836	0.8835	56.653	1882.857	2.13	21.899	65.847
$O. \Sigma$ 235	Doberck, 1879	0.5870	1.066	94.406	1839.10	96.29	129.92	60.22
μ^2 Bootis = Σ 1938	Doberck, 1878	0.5974	1.47	280.28	1863.51	173.7	20.0	39.96
35 Comae Berenices = Σ 1687	Gore, 1891	0.600	1.70	228.42	1815.72	27.75	269.066	67.95
λ Cygni = $O. \Sigma$ 413	Glasenapp, 1889	0.602	0.51	93.4	1926.9	105.3	139.1	58.8
τ Ophiuchi = Σ 2262	Doberck, 1875	0.6055	1.193	217.87	1821.91	65.43	41.4	58.7
η Cassiopeiae = Σ 60	Coit, 1882	0.622	8.702	167.4	1904.0	41.02	233.1	52.09
α Canis Majoris (Sirius)	Auwers, 1892	0.6292	7.568	49.399	1844.216	37.512	39.942	42.427
γ Centauri = H_2 5370	Gore, 1892	0.6316	1.50	61.88	1840.84	177.95	46.81	84.1
ζ Aquarii = Σ 2909	Doberck, 1875	0.6518	7.64	1578.33	1924.15	140.85	134.66	44.7
α Geminorum (Castor) = Σ 1110	Mann, 1890	0.653	5.54	265.7	1949.0	28.666	75.883	63.0
36 Andromedae = Σ 73	Doberck, 1875	0.6537	1.54	349.1	1798.80	57.9	142.316	41.65
$O. \Sigma$ 400	Gore, 1887	0.669	0.59	170.37	1882.09	146.333	43.333	36.966
p Eridani	Gore, 1887	0.674	6.96	302.37	1823.55	135.0	240.0	38.502
ξ Bootis = Σ 1888	Doberck, 1877	0.7081	4.86	127.35	1770.69	26.36	117.76	36.916
44 i Bootis = Σ 1909	Doberck, 1875	0.71	3.093	261.12	1783.01	65.5	1.3	70.1
25 Canum Venaticorum = Σ 1768	Doberck, 1880	0.7221	0.81	119.92	1863.04	42.36	245.0	33.33
γ Leonis = Σ 1424	Doberck, 1879	0.7327	1.98	407.04	1741.00	111.56	195.36	43.1
Σ 2091 ² = $De.$ 15	Gore, 1889	0.7352	1.10	205.46	1890.07	128.16	227.43	21.63
σ Coronae Borealis = Σ 2032	Doberck, 1876	0.7515	5.885	845.86	1826.93	18.35	71.6	31.366
37 Pegasi = Σ 2912	Gore, 1892	0.784	0.64	117.54	1885.51	120.17	154.55	80.77
φ Ursae Majoris = $O. \Sigma$ 208	Casey, 1882	0.788	0.54	115.4	1877.12	105.30	72.12	57.95
99 Herculis = $A. C.$ 15	Gore, 1890	0.7928	1.12	53.55	1885.58	50.083	110.733	38.616
Σ 2525	Gore, 1892	0.802	0.75	138.54	1887.12	78.31	4.31	54.0
i Leonis = Σ 1536	Gore, 1891	0.818	1.66	116.27	1919.90	46.616	216.25	40.65
γ Virginis = Σ 1670	Doberck, 1881	0.8978	4.09	180.54	1836.47	45.81	273.98	37.0

Mittlere Excentricität = 0.45

Supplement - Tabelle.

Be- wegung	Bogen	Zeit	Grössen		Licht- Verhältnis	A n m e r k u n g e n
—	$6\pi +$	108	3.0	6.5	1 : 25.12	Bahn sehr gut bestimmt.
+	4π	53	6.0	6.0	1 : 1	Bahnebene durch die Sonne hindurch.
—	167 *	68 *	4.1	6.1	1 : 6.31	Masse 2.8.
—	60	89	5.0	5.0	1 : 1	Bahnebene senkrecht auf der Gesichtslinie.
—	80	45	7.4	8.1	1 : 1.905	Die früheren Distanzen nicht sehr gut dargestellt.
+	84	134	5.3	5.9	1 : 1.738	Character des Systems zweifelhaft. Masse 0.7.
+	130	60	6.7	7.6	1 : 2.291	Messungen mässig gut dargestellt.
+	$3\pi +$	139	1.0	3.5	1 : 10.0	Umlaufszeit bleibt etwas unsicher. Masse 1.91.
+	360	109	6.2	7.0	1 : 2.09	Diese Bahn ist von Hall etwas corrigiert; scheint sehr gut für
+	323	46	7.0	7.3	1 : 1.318	Messungen nicht übereinstimmend. [ein so enges System.
+	100	46	6.0	7.3	1 : 3.311	Begleiter in der Nähe des Apastrons.
—	250	108	6.7	7.3	1 : 1.738	Mit μ^1 Bootis ein dreifaches System.
+	47	62	5.0	7.8	1 : 13.18	Apastron der scheinbaren Ellipse.
—	50	46	5.0	6.3	1 : 3.311	Messungen mässig gut dargestellt.
+	285	107	5.0	5.7	1 : 1.905	Bewegung wird langsamer.
+	116	111	4.0	7.6	1 : 27.6	Mit O. Struve's Parallaxe finden wir eine Masse 6.44.
—	85	28	1.0	10.0	1 : 3982	Masse 3.24. ¹⁾ In der Römischen Kaiserzeit scheint der Sirius
—	352	54	4.0	4.0	1 : 1	Bahn scheint zulässig. [roth gewesen zu sein. ²⁾
—	53	111	4.0	4.1	1 : 1.097	Bahn nur provisorisch. Umlaufszeit sehr lang.
—	125	170	2.5	3.5	1 : 2.512	Gore hält die Umlaufszeit für bedeutend länger.
+	60	60	6.2	6.9	1 : 1.905	Dunér hält diese Bahn für parabolisch!
—	190	46	7.2	8.2	1 : 2.512	Gore hat die Bahnebene senkrecht zur Milchstrasse gefunden.
—	120	63	6.0	6.0	1 : 1	Messungen gut dargestellt.
—	130	108	4.7	6.6	1 : 5.754	Ein starkgefärbtes System.
+	180(?)	110	5.2	6.1	1 : 2.291	Nach Gore ist die Bahnebene senkrecht zur Milchstrasse.
—	300	63	5.0	7.6	1 : 10.97	System sehr geneigt. Messungen schwer.
+	33	108	2.0	3.5	1 : 3.982	Bogen so kurz, dass die Bahn unsicher bleibt.
—	87	20	8.0	8.0	1 : 1	Darstellung der Messungen sehr gut.
+	220	105	5.0	6.1	1 : 2.76	Bewegung wird langsamer.
+	232	65	6.0	7.5	1 : 3.982	Bahn scheint zuverlässig.
+	$160 \pm$	46	5.0	5.6	1 : 1.738	Bahn provisorisch.
+	298	31	6.0	11.5	1 : 158.5	Messungen gut dargestellt.
—	288	62	7.2	7.3	1 : 1.097	Darstellung der Beobachtungen befriedigend.
—	35	62	3.9	7.1	1 : 19.0	Provisorische Elemente, welche sehr gut scheinen.
—	350	133	3.0	3.0	1 : 1	Bahn sehr genau, lässt wenig zu wünschen übrig. Typischer Doppelstern mit gleichen Componenten.

* Bogen und Zeit, die vom Rechner benutzt wurden; die älteren Messungen sind vernachlässigt worden.

¹⁾ Diese Bahn beruht auf Meridian-Beobachtungen sowohl wie auf micrometrischen Messungen und ist wahrscheinlich sehr genau.

²⁾ Siehe »History of the Color of Sirius«, *Astronomy and Astro-Physics*, April und Mai 1892.

Excentricitäten der Bahnen der Satelliten und Planeten.

Satelliten	Excen- tricität	Mittlere Excen- tricität	Anmerkungen		
Trabant des Neptun	. .	Diese Bahnen scheinen kreis- förmig.	Setzen wir voraus, der mittlere Wert der Excentricität der 12 kreisförmigen Bahnen sei gleich 0.0325 (er kann nicht so gross sein), dann haben wir für die mittlere Excentricität des ganzen Planetensystems 0.0389. Die Doppelsternbahnen zeigen eine mittlere Excentricität von 0.45, welche ungefähr 12 mal grösser ist.		
Ariel	. .				
Umbriel	. .				
Titania	. .				
Oberon	. .				
Mimas	. .				
Enceladus	. .				
Tethys	. .				
Dione	. .				
Rhea	. .				
Jo	. .	0.0325	Planeten	Excen- tricität	Mittlere Excen- tricität
Europa	. .		Venus . . .	0.00684	0.06026
Ganymed	0.0013		Neptun . . .	0.00896	
Deimos	0.0057		Erde . . .	0.01677	
Phobos	0.0066		Uranus . . .	0.04634	
Calypso	0.0072		Jupiter . . .	0.04825	
Japetus	0.0296		Saturn . . .	0.05607	
Titan	0.0299		Mars . . .	0.09326	
Mond	0.05491		Mercur . . .	0.20560	
Hyperion	0.1189				

diejenigen, die Mr. J. E. Gore, F. R. A. S., für die zuverlässigsten hält, welcher die Bewegungen der verschiedenen Systeme sorgfältig verfolgt hat, und dem ich Dank schulde für Ratschläge und Kritik bei Auswahl der vorliegenden Tabelle. Um den grossen Bereich der Excentricität in den Sternsystemen zu illustrieren, ist die Tabelle nach den Excentricitäten geordnet worden. In den Supplement-Tabellen sind Anmerkungen gegeben, um die relative Zuverlässigkeit der verschiedenen Bahnen zu zeigen; ebenso das Lichtverhältnis der zusammengehörigen Sterne, aus dem man sich eine allgemeine Anschauung über die betreffenden Massen der Sterne des Systems bilden kann. In besonderen Fällen werden die Massen von den vermuteten sehr verschieden sein, aber man darf mit Recht glauben, dass durchschnittlich das Licht wohl ungefähr der Masse entsprechen wird, was besagen würde, dass durchschnittlich der Hauptstern ungefähr dreimal so gross ist, wie sein Begleiter. Dieses Resultat stimmt sehr gut mit den Resultaten von M. Poincaré und Prof. Darwin und mit der Teilung, die man an den von Sir John Herschel abgebildeten Doppelnebeln beobachtet, überein.

Die mittlere Excentricität der hier aufgenommenen Sternbahnen hat sich als 0.45 betragend herausgestellt, d. h. ungefähr zwölfmal so gross wie die mittlere Excentricität (0.0389) der Bahnen der Planeten und Satelliten des Sonnensystems.

In der vorliegenden Untersuchung haben wir der Kürze wegen absichtlich nur den Fall der Identität betrachtet, aber in meiner ausführlicheren Arbeit (*»Evolution of the Stellar Systems«*) ist es bewiesen, dass die Entwicklungsgeschichte des Helios-Sol-Systems in anderen Fällen im Wesentlichen ähnlich ist. Daher können wir die gegebenen Resultate als im Allgemeinen gültig ansehen, ob nun die Sterne eines Systems identisch oder nicht identisch sind.

In der vorhergehenden Untersuchung haben wir gezeigt, dass die Gezeitenreibung die Bahnen ausdehnt und sie immer mehr excentrisch macht. Auf das Planetensystem hat die Gezeitenreibung nicht in irgendwie erheblichem Maasse eingewirkt, in den Doppelsternsystemen aber hat diese Ursache offenbar eine wichtige Rolle gespielt. Man kann leicht beweisen, dass Doppelsterne nicht aus der Annäherung getrennter Sterne entsprungen sind, sondern dass sie sich aus Nebeln durch irgend einen Entwicklungsprocess gebildet haben müssen. Alle bisher aufgestellten Hypothesen für die Entstehung dieser Systeme sind, wie sich leicht beweisen lässt, dynamisch unhaltbar*, weshalb es mir scheint, dass die hier niedergelegte Theorie der Doppelsternentwicklung der Annahme wert sein dürfte, denn es ist nicht nur eine genügende, sondern auch eine practisch notwendige Theorie.

Zum Schluss möchte ich nicht unterlassen, meinen hochverehrten Lehrern, Herren Prof. Foerster und Prof. Tietjen, für die mir freundlichst gewährte Be-

* Siehe meine Schrift: *»Evolution of the Stellar Systems«* (noch nicht publiciert), oder *»The Observatory«* für Februar und März 1891, oder *»Sidereal Messenger«* für Februar und April 1891.

lehrung und Unterstützung und die bei dieser Arbeit geleistete Anregung, sowie den Herren Prof. G. H. Darwin, Dr. Wm. Huggins, Prof. C. A. Young und Prof. W. B. Smith für freundliche Ratschläge meinen innigsten Dank auszusprechen.

Endlich danke ich Herrn Karl Necker und Mr. John Hollins für freundliche Hülfe, namentlich bei der numerischen Berechnung der Excentricitätscurve der Zeichnung **E** und bei der Vorbereitung des Manuscriptes.



Fehler-Verzeichnis.

Seite 15, Zeile 15 von oben lies »der Länge« statt »des Raumes«.

Seite 20, Zeile 2 von oben lies $\frac{18}{x}$ statt $\frac{18}{2}$.

Seite 27, Gleichung (36) lies $\frac{x^2(x-H)}{x^4-Hx^3+2} = \frac{\frac{1}{4}(4x^3-3Hx^2)-\frac{1}{4}Hx^2}{x^4-Hx^3+2}$.

Seite 32, Zeile 4 von oben lies λ^3 statt $\lambda^{\frac{3}{2}}$.

Seite 43, Zeile 24 von oben lies ε statt e .

In der ersten Darwin'schen Tafel, Fig. 4, lies »Gleiche Massen sich beinahe berührend«.

Seite 47, letzte Zeile lies »444, 2197« statt »442, 2179«.

THESEN.

I.

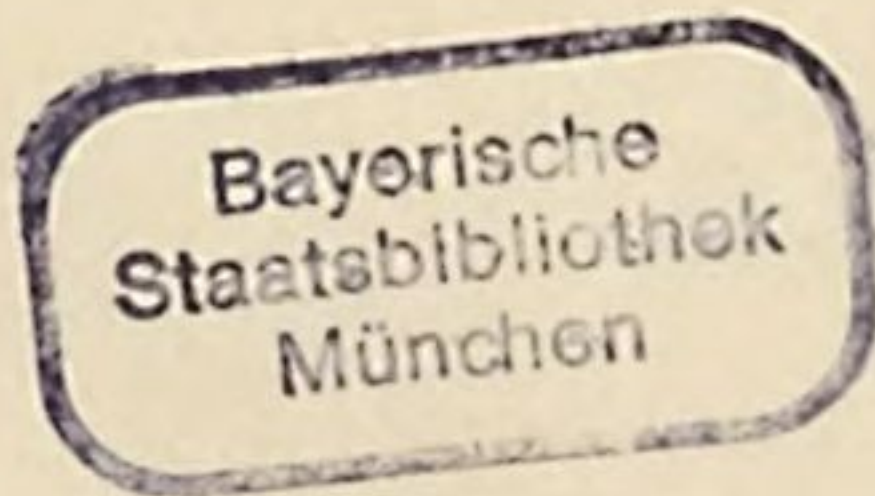
Wenn bei einem Doppelstern die Parallaxe und Umlaufszeit bekannt sind, so wird die spectroscopische Bestimmung der relativen Bewegung der Componenten in der Gesichtslinie ein strenges Verfahren zur Bestätigung des Gravitationsgesetzes in diesem System liefern.

II.

Die zahlreichen Angaben der Griechen und Römer über die rötliche Farbe des Sirius im Altertum scheinen zu beweisen, dass der Stern in historischer Zeit seine Farbe geändert hat.

III.

Im gegenwärtigen Stadium der astronomischen Erkenntnis scheint die mittlere Sonnenparallaxe sich am genauesten aus der Constanten der Aberration bestimmen zu lassen.



THOMAS JEFFERSON JACKSON SEE DE VITA SUA.

Natus sum, Thomas Jefferson Jackson See, prope urbem Montgomery in civitate Missouriensi Reipublicae Americanae, hujus saeculi anno LXVI a. d. XI Kalendas Martias, patre Noacho, quem morte mihi ereptum esse lugeo, matre Maria e gente Sailor, qua adhuc superstite laetor.

Fidei addictus sum evangelicae.

Postquam scholas in oppido natali per novem annos frequentavi, in urbem Columbiam me contuli, ubi in Universitate civitatis Missouriensis per decem semestria studiis me dedi, atque perfunctus maturitatis examine admissus sum anno hujus saeculi LXXXIX ad gradus Baccalaurei Artium, Litterarum et Scientiarum summis cum honoribus, ad gradus Magistri anno XCII.

Cum sempiterno animum induxissem ad sublimissima illa studia, quae in observandis sideribus eorumque motibus computandis et in evolutione stellarum ex nebulis investiganda versantur, in Germaniam transivi, ubi Universitatis Regiae Fridericae Guilelmae Berolinensis astronomicis lectionibus professorum illustrissimorum facultatis philosophiae per septem semestria interfui. Multum vero laboris mihi videor consumpsisse et in studiis mathematicis de evolutione stellarum duplicium planetarumque motibus et in observationibus per magnum Fraunhoferi tubum in specula, quam dicunt astronomica, ad quem beneficio virorum clarissimorum Foerster et Knorre mihi per tres menses aditus datus est.

Magistri doctissimi celeberrimi me docuerunt in Universitate Missouriensi:

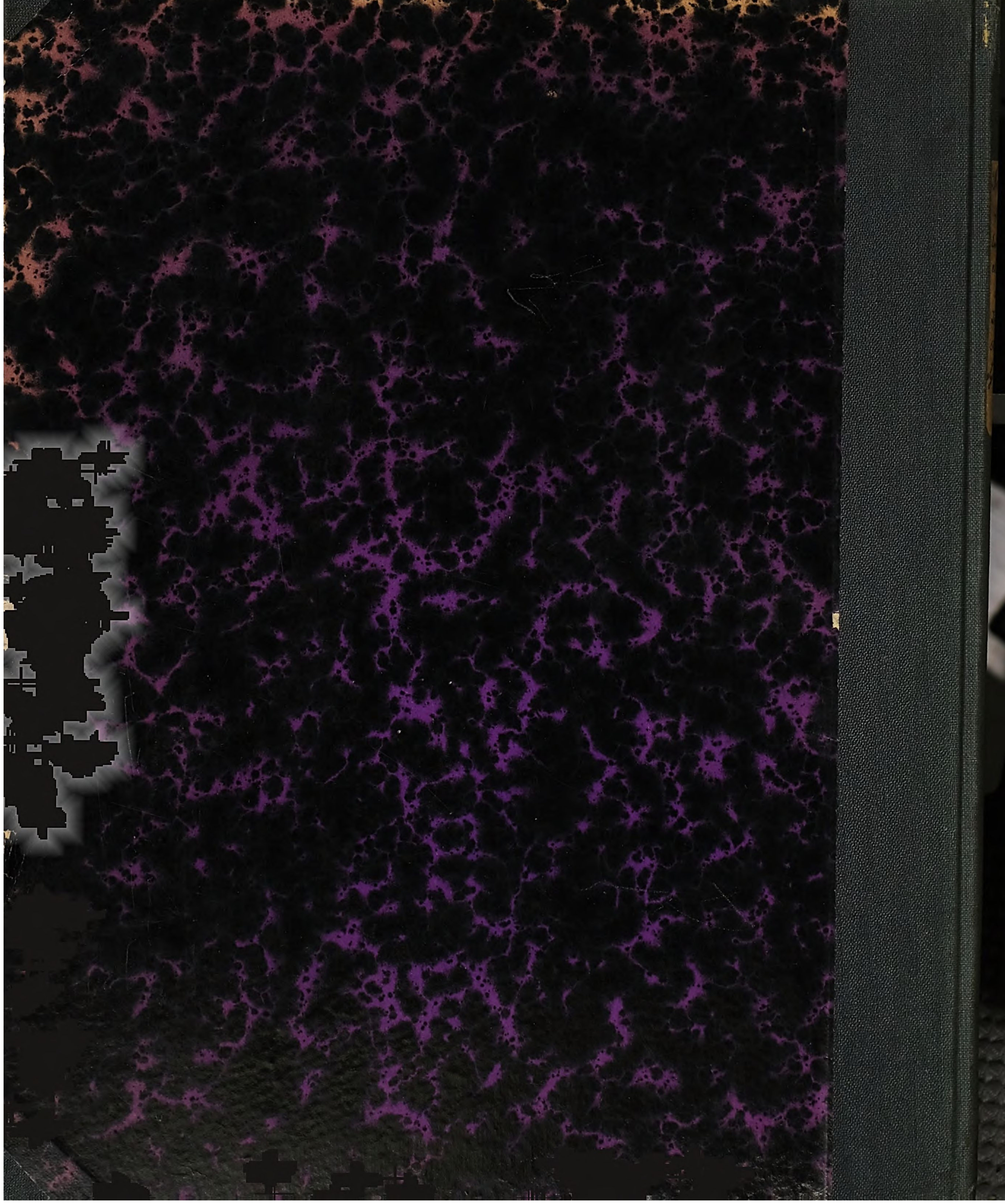
Smith, Schweitzer, Jones, Allen, Broadhead, Fisher, Ficklin,
Blackwell, Fleet, Schuermann, Bliss, Clendennin, Tindall, Black.

In Universitate Berolinensi:

Foerster, Tietjen, Lehmann-Filhés, de Helmholtz, Kundt, Fuchs,
Knoblauch, Zeller.

Inter eos qui in studiis de evolutione stellarum consiliis mihi praesto fuerunt gratiae magistris illustrissimis Darwin, Huggins, Young agenda sunt.

Omnibus quos supra dixi viris optime de me meritis, imprimis autem viris illustrissimis Foerster et Tietjen ex animi sententia gratias ago quam maximas et sempiternum animum gratum piumque servabo.



See, Thomas J. J.,

Die Entwicklung der Doppelstern-Systeme

1892

4 Astr.p. 415 oz

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11471671-5